

Alternative Prüfungsleistung

GUTACHTEN IN DER FORENSIK

ANHAND DES FIKTIVEN VORFALLS

ABITURPRÜFUNGS-DIEBSTAHL

Eingereicht am: 14.07.2024

von: FFM_07

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis.....	IV
Tabellenverzeichnis.....	VII
1 Aufgabenstellung.....	1
2 Simulierter Vorfall Abiturprüfungsdiebstahl.....	2
2.1 Vorfall.....	2
2.2 Fallanalyse.....	3
2.2.1 Aufnahme der Ermittlungen.....	3
2.2.2 Julian K.'s Zuhause.....	4
2.2.3 Befragung des Schülers Julian K.....	4
2.2.4 IT-forensisches Labor.....	5
2.2.5 Erkenntnisse der Analyse der Beweise.....	5
2.2.6 Befragung der Schüler Tom B. und Julia S.....	6
2.2.7 Konfrontation von Julian K. mit den Beweisen.....	6
3 Erstellung des Szenarios.....	9
3.1 USB-Stick und Abiturprüfung.....	9
3.1.1 Bereitstellung der Abiturprüfung.....	9
3.1.2 Vorbereitung der Spuren.....	9
3.2 Laptop.....	12
3.2.1 Ausgangslage.....	12
3.2.2 Vorbereitung der Spuren.....	14
3.3 Ablauf der Spurenlegung.....	17
3.3.1 Ändern der Dateiattribute (Zeitstempel) mit Hilfe von Attribute Changer.....	18
4 Strategisch geplantes Vorgehen nach pSAP-Modell.....	20

4.1 Strategische Vorbereitung (Prepare).....	20
4.2 Operationale Vorbereitung (Prepare).....	21
4.3 Datensicherung (Secure).....	22
4.3.1 Technische Sicherungsreihenfolge.....	23
4.3.2 Imageerstellung und Hashwertbildung.....	23
4.3.3 Eingesetzte Hard- und Software.....	24
4.4 Datenauswertung (Analyse).....	24
4.4.1 Vorgehensweise bei der Analyse.....	24
4.4.2 Bilden einer Zeitbasis.....	25
4.4.3 Eingesetzte Software.....	25
4.5 Präsentation der Ergebnisse (Present).....	25
5 Gutachten.....	26
5.1 Deckblatt.....	26
5.2 Auftragspezifikation.....	27
5.2.1 Asservat 01 (USB-Stick):.....	27
5.2.2 Asservat 02 (Laptop):.....	28
5.3 Zusammenfassung der Ermittlungsergebnisse.....	28
5.3.1 Ergebnisse der Analysen.....	28
5.3.2 Festgestellte Verbindungen und Zeitrahmen.....	29
5.3.3 Darstellung der Beweiskette und forensische Methoden.....	29
5.4 Untersuchungsobjekte.....	31
5.4.1 Asservat 01 (USB-Stick).....	31
5.4.2 Asservat 02 (Laptop).....	32
5.5 Untersuchungswerkzeuge.....	33
5.6 Untersuchung der Asservate.....	34
5.6.1 Asservat 01 (USB-Stick).....	34
5.6.2 Asservat 02 (Laptop).....	36
5.6.3 Zusammenhänge und Timeline.....	46

5.7 Abschließende Bemerkungen.....	49
5.8 Anlagen.....	50
6 Zusammenfassung und Schlussbemerkung.....	51
7 Erzeugung eines Datenträgerabbildes.....	54
7.1 Vorbereitung des Datenträgers für die forensischen Images.....	54
7.2 Image des USB-Stick erstellen.....	58
7.3 Image des Laptop erstellen.....	60
8 Dokumentation der Details der forensischen Analyse.....	64
8.1 Analyse der Images.....	64
8.2 Analyse Word Dateien.....	70
9 Anhang.....	71

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Julian K.'s Laptop.....	4
Abbildung 2: Auszug Abiturprüfung.....	9
Abbildung 3: Vergleich Abiturprüfungen Notenvergabe.....	10
Abbildung 4: Vergleich Abiturprüfungen Aufgabenstellung.....	11
Abbildung 5: Dateiiinhalt USB-Stick nach dem Vorfall.....	11
Abbildung 6: USB-Stick.....	12
Abbildung 7: Geöffneter Laptop des fiktiven Täters.....	13
Abbildung 8: Oberseite (Deckel) des Laptops des fiktiven Täters.....	13
Abbildung 9: Systeminformationen des Betriebssystems des Laptops.....	14
Abbildung 10: Inhalt des Desktops auf dem Laptop.....	15
Abbildung 11: Das Bild "Flex für Kumpels 2.JPG".....	15
Abbildung 12: Die Abiturprüfung im Original und der Ordner mit der veränderten Version.....	16
Abbildung 13: Auszug Chat.....	17
Abbildung 14: Benutzeroberfläche von Attribute Changer.....	19
Abbildung 15: pSAP-Modell.....	20
Abbildung 16: USB-Stick mit geschlossenem Schutzbügel.....	31
Abbildung 17: USB-Stick mit geöffnetem Schutzbügel.....	31
Abbildung 18: Laptop Oberseite.....	32
Abbildung 19: Laptop Unterseite.....	32
Abbildung 20: Laptop aufgeklappt.....	33
Abbildung 21: Laptop - Detail der Unterseite.....	33
Abbildung 22: Auf dem Datenträger befindliche Objekte.....	36
Abbildung 23: Unterschiede der Textdateien 2 und 3 - Teil 1.....	40
Abbildung 24: Unterschiede der Textdateien 2 und 3 - Teil 2.....	40

Abbildung 25: Vergleich von Textdatei 3 und Textdatei 2 mit Ausschnitt aus der Bilddatei Flex für Kumpels.JPG Teil 1.....	49
Abbildung 26: Vergleich von Textdatei 3 und Textdatei 2 mit Ausschnitt aus der Bilddatei Flex für Kumpels.JPG Teil 2.....	49
Abbildung 27: Benutzeroberfläche von OSForensics.....	53
Abbildung 28: Identifikation des korrekten Datenträgers.....	54
Abbildung 29: Der Datenträger wird mit NTFS Dateisystem formatiert.....	55
Abbildung 30: Auswahl der Löschmethode.....	55
Abbildung 31: Bestätigung der Löschoption durch Texteingabe "ERASE ALL".....	56
Abbildung 32: Abermalige Bestätigung zum Beginnen des Löschvorgangs.....	56
Abbildung 33: Der Löschvorgang beginnt mit der Formatierung.....	57
Abbildung 34: Abschluss der Low-Level Formatierung nach 1h, 38min.....	57
Abbildung 35: Abschluss der Löschoption nach 4h, 57 min.....	58
Abbildung 36: Informationen zum externen Laufwerk von SAFE Block.....	59
Abbildung 37: Durch Software Writeblocker SAFE Block werden die USB Stick Schreibrechte geblockt.....	59
Abbildung 38: Erstellen des Images des USB-Stick.....	60
Abbildung 39: Erstellung eines Abbilds (Image) der gesamten Festplatte.....	61
Abbildung 40: Es wird das EWF Format genutzt (Option 3).....	61
Abbildung 41: Nach der Auswahl der Parameter zur Imageerstellung beginnt der Prozess.....	62
Abbildung 42: Image-Erstellung abgeschlossen.....	62
Abbildung 43: Das Datenträgerabbild in 19 Dateien.....	63
Abbildung 44: Metadaten zum Image des USB-Sticks.....	64
Abbildung 45: Ergebnis der Analyse des Images vom USB-Stick.....	65
Abbildung 46: Mediendateien mit markierten Elementen, gefiltert nach Beweismittelquelle, Stichwörtern und Tatzeitraum.....	66
Abbildung 47: Darstellung der markierten Elemente an Mediendateien.....	67

Abbildung 48: gefilterte und markierte Microsoft Word Dokumente von allen Beweismittelquellen.....	67
Abbildung 49: Darstellung von Beziehungen zwischen zwei Artefakten.....	68
Abbildung 50: Markierte Ereignisse des Betriebssystems zu Speichergeräten.....	69
Abbildung 51: Zeitachse mit gefilterten Ereignissen.....	70

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Übersicht über die Untersuchungsobjekte im Fall 123 JS 4567/24.....	31
Tabelle 2: Übersicht über Untersuchungswerkzeuge.....	34
Tabelle 3: Ausgewählte Eigenschaften des USB-Sticks.....	35
Tabelle 4: Eigenschaften der Datei Abipruefung_Mathe.docx (Textdatei 1).....	35
Tabelle 5: Informationen zum Gerät (Laptop).....	36
Tabelle 6: Details zum Betriebssystem von Asservat 02.....	38
Tabelle 7: Eigenschaften der Textdateien.....	39
Tabelle 8: auf Asservat 02 gefundene Mediendateien.....	40
Tabelle 9: Übersicht über relevante Ereignisse des Betriebssystems.....	46
Tabelle 10: Zeitachse / Timeline der Ereignisse.....	46

1 Aufgabenstellung

Diese Hausarbeit stellt eine alternative Prüfungsleistung für das Modul „Forensik in Betriebs- und Anwendungssystemen“ im Masterstudiengang „IT-Sicherheit und Forensik“ der Hochschule Wismar dar.

Im Rahmen dieser Arbeit werden wir forensische Windows-Tools einsetzen, um digitale Images zu erstellen und zu analysieren. Als Ausgangspunkt dient die Entwicklung eines fiktiven Szenarios, das einen sicherheitsrelevanten Vorfall simuliert.

Die erstellten Images dienen als Grundlage für eine forensische Analyse. Unter Verwendung der Forensik-Software Axiom werden wir die Datenträgerabbilder untersuchen, um relevante Informationen und Beweise zu extrahieren.

Ein zentraler Bestandteil dieser Arbeit ist die Erstellung eines umfassenden, forensischen Gutachtens. Dieses Gutachten dokumentiert die Ergebnisse der Analyse und präsentiert eine nachvollziehbare Timeline des simulierten Vorfalls. Dabei liegt der Fokus der Untersuchung des Vorfalls auf dem strategischen Vorgehen nach dem pSAP Modell sowie der klaren und präzisen Beschreibung der einzelnen Untersuchungsschritte und Ergebnisse.

Zu den festgelegten Rahmenbedingungen für diese Arbeit gehören:

- Entwicklung eines zeit-basierten Szenarios
- Erstellung von zwei darauf aufbauenden Images
- Analyse der Images unter Anwendung von Forensik-Tools
- Dokumentation der Analyse in Form eines forensischen Gutachtens

2 Simulierter Vorfall Abiturprüfungsdiebstahl

In diesem Kapitel wird der simulierte Vorfall beschrieben, welcher im späteren Verlauf der Hausarbeit mittels forensischer Methoden und Mittel aufgeklärt werden soll.

2.1 Vorfall

Wie jedes Jahr bereiten sich zahlreiche Schüler im ganzen Saarland auf die bevorstehenden Abiturprüfungen im Fach Mathematik vor. Am 20. Juni 2024 sollen die Abiturprüfungen für Mathematik am Gymnasium am Rotenbühl stattfinden. Dieses Jahr wurde die Abiturprüfung aus Digitalisierungsgründen und im Rahmen der Modernisierung des saarländischen Schulwesens digital vom Ministerium für Bildung und Kultur an die Schulen verteilt. Die Prüfung wurde auf einem USB-Stick an die Schule übergeben und sicher in einem Tresor innerhalb des Lehrerzimmers verwahrt, wo der USB-Stick mit der Prüfung bis zum Prüfungstag aufbewahrt werden soll.

Am Morgen des 19. Juni, einen Tag vor dem regulären Prüfungstag, stellte der Hausmeister, welcher täglich als Erstes das Schulgelände betritt, fest, dass in das Gymnasium eingebrochen wurde. Überwältigt von der Situation verständigte dieser gegen 07:12 Uhr die örtliche Polizeistelle Saarbrücken. Als die Polizei um 07:35 Uhr am Tatort ankommt, wurde eine erste Spurensicherung durchgeführt. Hierbei wurde entdeckt, dass die Tür des Lehrerzimmers aufgehebelt und der Tresor mit dem USB-Stick aufgebrochen wurde. Der USB-Stick befand sich jedoch immer noch im Tresor.

Zu diesem Zeitpunkt entschied sich die Schulleitung, welche zwischenzeitlich ebenfalls am Tatort angekommen war, dass der reguläre Schulbetrieb weitergehen soll, insbesondere da bereits am 20. Juni die Abiturprüfungen stattfinden.

Die Polizeistelle Saarbrücken nahm noch am selben Tag die Ermittlungen auf.

2.2 Fallanalyse

Nachdem die Polizei am Morgen des 19. Juni am Tatort ankam, wurde eine erste Untersuchung des Tatorts vorgenommen. Zu diesem Zeitpunkt sind folgende Informationen bezüglich des Vorfalls bekannt:

- Die Abiturprüfung wurde vom Ministerium für Bildung und Kultur in Form eines USB-Sticks an die Schule übergeben. Diese lagerte den USB-Stick in einem Tresor im Lehrerzimmer.
- Am 20. Juni 2024 sind die Abiturprüfungen in Mathematik im Saarland.
- Am Morgen des 19. Juni 2024 wurde das aufgebrochene Lehrerzimmer entdeckt.
- Als die Polizei am Morgen des 19. Juni den Tatort sicherte und eine erste Spurensicherung unternahm, wurde entdeckt, dass der USB-Stick mit den Prüfungen am Tatort zurückblieb.

2.2.1 Aufnahme der Ermittlungen

Die Polizei begann unverzüglich mit der Aufnahme der Ermittlungen. Mit dem Hintergrund der bevorstehenden Abiturprüfung in Mathematik am 20. Juni 2024, wurde der Fokus der Ermittlungen schnell auf die Untersuchung des USB-Sticks mit der Abiturprüfung gelegt. Zunächst wurde im Anschluss an die Tatortsicherung, der Abtransport des USB-Sticks in das IT forensische Labor angeordnet. Im Labor soll der USB-Stick analysiert werden, um weitere Details zum Vorfall gewinnen zu können. Parallel erfolgt am 19. Juni um 12:00 Uhr eine Befragung der Lehrkräfte der Schule. Die Befragung der Lehrkräfte ergab, dass einige Schüler des Abschlussjahrgangs Schwächen in Mathematik aufwiesen. Der Fokus der Ermittlung fiel auf den Schüler Julian K., welcher Schwächen in Mathematik aufwies und dem hinzu ebenfalls schon

öfter in der Schule negativ aufgefallen, sowie polizeilich bekannt war. Infolgedessen wurde noch am selben Tag ein Durchsuchungsbeschluss für das Elternhaus des Julian K. von der Staatsanwaltschaft beim zuständigen Gericht beantragt und vom Richter genehmigt. Ebenso wurde vorsorglich landesweit durch das Ministerium für Bildung und Kultur angeordnet, dass die Abiturprüfung im Fach Mathematik gegen alternative Prüfungsaufgaben ausgetauscht wird.

2.2.2 Julian K.'s Zuhause

Am 20. Juni um 09:00 Uhr wurde eine Durchsuchung des Elternhauses von Julian K. in der Straße "Am Kalkofen 26 in Saarbrücken" durchgeführt. Die Forensiker konnten im Kinderzimmer des Julian K. einen Laptop sicherstellen, welcher in der Abbildung 1 zu sehen ist. Dieser wurde von der Polizei beschlagnahmt und an das IT-forensische Labor überstellt.



Abbildung 1: Julian K.'s Laptop

2.2.3 Befragung des Schülers Julian K.

Im Anschluss an die Hausdurchsuchung wurde gegen 12:00 Uhr eine Befragung des tatverdächtigen Schülers Julian K. durch die Polizei durchgeführt. Julian K. bestritt zu diesem Zeitpunkt jedwellige Beteiligung an dem Einbruch und dem Tatvorwurf, sich

illegal Zugriff auf die Abiturprüfung verschafft zu haben.

2.2.4 IT-forensisches Labor

Nachdem der USB-Stick am 19. Juni und der Laptop am 20. Juni im IT-forensischen Labor angekommen sind, wurde eine Datensicherung und Analyse der Beweise durchgeführt. Die Datensicherung des USB-Sticks kann in Kapitel 7.2 eingesehen werden. Die anschließende Analyse des Images ist in Kapitel 8.1 zu finden. Für die Datensicherung des Laptops von Julian K. wird detailliert im Kapitel 7.3 behandelt. Die Analyse des Festplatten-Images des Laptops kann in Kapitel 8.1 und 8.2 eingesehen werden.

2.2.5 Erkenntnisse der Analyse der Beweise

Bei der Analyse der Images konnten mittels eines IT-forensischen Tools Beweise identifiziert werden, die den Schüler Julian K. unmittelbar mit dem Einbruch in das Gymnasium, sowie dem Abiturprüfungsdiebstahl in Verbindungen brachten. Zum einen lieferte eine Analyse des USB-Stick-Images die Information, dass die originale Abiturprüfung durch eine manipulierte Abiturprüfung ausgetauscht wurde. Zum anderen konnten auf dem Laptop-Image u.a. Bilder identifiziert werden, welche klar zeigten, dass Julian K. vor der Tat das Außengelände der Schule auskundschaftet hatte. Ein weiteres Bild zeigte den Beschuldigten, wie dieser auf einem Bild posierte, auf welchem im Hintergrund die Abiturprüfung auf dem Monitor zu sehen war. Die Analyse eines gefundenen Videos auf dem Laptop des Julian K. ergab, dass es sich bei dem Video um einen aufgezeichneten Verkaufs-Chat mit anderen Mitschülern handelte. Somit hatte Julian K. dem Anschein nach die Absicht, aus seinem Diebstahl einen monetären Nutzen zu ziehen. Die gestohlene Abiturprüfung konnte des Weiteren auf

dem Laptop bzw. Laptop-Image zweifelsfrei nachgewiesen werden. In Kombination mit der Erkenntnis, dass in besagtem Tatzeitraum der USB-Stick mit der Abiturprüfung an den Laptop des Julian K. angeschlossen wurde, erhärtete sich der Verdacht der Ermittler, dass der Schüler Julian K. eine zentrale Rolle bei dem Vorfall spielte.

2.2.6 Befragung der Schüler Tom B. und Julia S.

Infolge der Untersuchung des Laptop-Images und der darauffolgenden Analyse des Videos vom Verkaufs-Chat wurde am 30. Juni um 9:00 Uhr eine Befragung der Schüler Tom B. und Julia S. angesetzt. Die Schüler wurden mit den sichergestellten Beweisen konfrontiert und gaben den Erwerb der Abiturprüfung zu. Im Austausch für eine Aussage gegen den Schüler Julian K. wurde von der Einleitung eines Strafverfahrens gegen die Schüler Tom B. und Julia S. wegen des Erwerbs der gestohlenen Abiturprüfung abgesehen.

2.2.7 Konfrontation von Julian K. mit den Beweisen

Am Morgen des 1. Juli um 10:00 Uhr wurde Julian K. für eine erneute Befragung durch die Ermittler auf die Polizeiwache Saarbrücken geladen. Im Zuge der Befragung wurde Julian K. mit den Beweisen aus der IT-forensischen Analyse konfrontiert. Zunächst stritt Julian K. weiterhin die Tat ab. Nachdem Julian K. jedoch die Aussagen der Schüler Tom B. und Julia S. vorgelegt wurde, knickte dieser ein und gestand die Tat schlussendlich. Gegenüber den Ermittlern bestätigte Julian K. anschließend folgenden Tathergang:

Julian K. hatte ein Gespräch von zwei Lehrkräften mitgehört, welche sich darüber unterhielten, dass dieses Jahr die Abiturprüfung in Mathematik digital den Schulen zur

Verfügung gestellt wird und in einem kleinen Tresor im Lehrerzimmer aufbewahrt wird. Da dieser noch nie wirklich fit in Mathematik war und keine Lust hatte, sich intensiv auf die Prüfung vorzubereiten, fasste Julian K. den Entschluss, die Prüfungsaufgaben zu stehlen. Hierfür observierte dieser das Schulgelände des Gymnasiums am Rotenbühl und erkundigte sich zusätzlich über Google Maps bzgl. möglicher Fluchtwege und schwer einzusehender Stellen auf dem Schulgelände. Im Anschluss besorgte sich Julian K. ein Brecheisen, um an seinem identifizierten Einstiegspunkt in der Nähe des Lehrerzimmers in die Schule einzusteigen. Um die Abiturprüfung zu kopieren, hatte er den Plan seinen eigenen Laptop mitzunehmen. In der Nacht vom 18. auf den 19. Juni setzte Julian K. schlussendlich seinen Plan in die Tat um. Gegen 21:15 Uhr machte er sich auf den Weg zum Gymnasium. Am Schulgelände angekommen, hebelte er ein nicht ordentlich verschlossenes Fenster in der Nähe des Lehrerzimmers mit dem Brecheisen auf und verschaffte sich gewaltsam Zugang zum Lehrerzimmer. Da der Tresor mit dem USB-Stick nicht besonders robust war, war es für Julian K. leicht, mithilfe der Brechstange den Tresor zu öffnen. Den erbeuteten USB-Stick schloss dieser an seinen Laptop an, um die Abiturprüfung zu kopieren. Dabei warf er einen Blick in die Abiturprüfung und sah eine Aufgabe, die er selbst mit Kenntnis der Lösung nicht während der Prüfung hinbekommen würde. Er fasste den Entschluss, diese Aufgabe einfach aus der Prüfung zu löschen und die Aufgabenstellung und Punktzahl entsprechend anzupassen. Er ersetzte die auf dem USB-Stick befindliche Datei mit der von ihm veränderten Version. Danach packte er den USB-Stick zurück in den Tresor. Um die Polizei auf eine falsche Fährte zu locken, verwüstete Julian K. anschließend das Lehrerzimmer und verließ dann wieder das Schulgelände auf dem gleichen Weg, wie er reinkam. Am nächsten Tag vor Beginn der Schule hatte er die Idee, seine erbeutete Abiturprüfung an seine Freunde Tom B. und Julia S. zu verkaufen. Als diese

dem Kauf schlussendlich zustimmen und die Abiturprüfung erhalten haben, legte Julian K. ein Video von dem Verkauf auf seinem Laptop ab, um einen Beweis für das Eintreiben des Kaufpreises zu haben.

Abschließend äußerte sich Julian K. zur Tat wie folgt:

“Am Ende habe ich mich wohl selbst der Tat überführt, indem ich alle Beweise, die mich belasten, auf meinem eigenen Laptop abgelegt habe. [...] Ich wollte doch nur meine Chancen auf ein gutes Abi in Mathematik ein wenig erhöhen. [...] Ich wusste, dass das Risiko, entdeckt zu werden, hoch war, aber noch lieber wollte ich, dass meine Eltern endlich mal stolz auf mich sein können. [...] Na ja, hat wohl nicht so ganz geklappt!”

3 Erstellung des Szenarios

In diesem Kapitel werden die Spuren für die anschließende IT-forensische Untersuchung des Falls gelegt.

3.1 USB-Stick und Abiturprüfung

3.1.1 Bereitstellung der Abiturprüfung

Zum Einsatz kommt bei der Fallkonstruktion ein USB-Stick unbekannter Marke (siehe Abbildung 6). Auf dem USB Stick befindet sich eine Textdatei mit den Abiturprüfungen 2024 im Fach Mathematik.

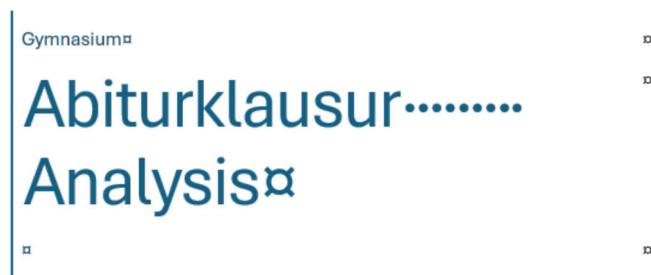


Abbildung 2: Auszug Abiturprüfung

3.1.2 Vorbereitung der Spuren

Um die Spuren des Täters zu legen, wird die Word-Datei mit der Abiturprüfung in Word bearbeitet. Dabei wird eine Kopie der Word-Datei erstellt, in welcher bestimmte Matheaufgaben gelöscht werden. Die Originaldatei wird anschließend auf dem USB-Stick gelöscht und die manipulierte Datei mit dem Namen der Originaldatei ausgestattet.

Konkret werden folgende Änderungen an der Originaldatei vorgenommen.

Um eine Veränderung der Abiturprüfung vorzunehmen, werden zwei Aufgaben aus der Abiturprüfung gelöscht und die Gesamtpunktzahl sowie die Aufgabenstellung angepasst. Die Änderungen können in Abbildung 3 und 4 eingesehen werden.

Abiturprüfung Original			Abiturprüfung manipuliert		
Note	Erreichte Punkte (gesamt)	Prozent (%)	Note	Erreichte Punkte (gesamt)	Prozent (%)
1+ (15)	112 - 120	93 - 100	1+ (15)	84 - 90	93 - 100
1 (14)	106 - 111	88 - 92	1 (14)	79 - 83	88 - 92
1- (13)	100 - 105	82 - 87	1- (13)	74 - 78	82 - 87
2+ (12)	93 - 99	77 - 81	2+ (12)	69 - 73	77 - 81
2 (11)	87 - 92	71 - 76	2 (11)	64 - 68	71 - 76
2- (10)	81 - 86	66 - 70	2- (10)	59 - 63	66 - 70
3+ (9)	74 - 80	60 - 65	3+ (9)	54 - 58	60 - 65
3 (8)	68 - 73	55 - 59	3 (8)	49 - 53	55 - 59
3- (7)	62 - 67	49 - 54	3- (7)	44 - 48	49 - 54
4+ (6)	55 - 61	43 - 48	4+ (6)	39 - 43	43 - 48
4 (5)	49 - 54	38 - 42	4 (5)	34 - 38	38 - 42
4- (4)	43 - 48	33 - 37	4- (4)	29 - 33	33 - 37
5+ (3)	36 - 42	27 - 32	5+ (3)	24 - 28	27 - 32
5 (2)	30 - 35	21 - 26	5 (2)	19 - 23	21 - 26
5- (1)	24 - 29	16 - 20	5- (1)	15 - 18	16 - 20
6 (0)	0 - 23	0 - 15	6 (0)	0 - 14	0 - 15

Aufgabe	Punkte pro Aufgabe (max. 15)	Gesamtpunkte (max. 105)	Aufgabe	Punkte pro Aufgabe (max. 15)	Gesamtpunkte (max. 105)
Aufgabe a	15	15	Aufgabe a	15	15
Aufgabe b	15	30	Aufgabe b	15	30
Aufgabe c	15	45	Aufgabe c	15	45
Aufgabe d	15	60	Aufgabe d	15	60
Aufgabe e	15	75	Aufgabe e	15	75
Aufgabe f	15	90	Aufgabe f	15	75
Aufgabe g	15	105			
Aufgabe h	15	120			

Abbildung 3: Vergleich Abiturprüfungen Notenvergabe

Abiturprüfung Original	Abiturprüfung manipuliert
<p>Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch</p> $f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2$ <p>a) Untersuche die Funktion f_t auf Symmetrie. b) Berechne die Schnittpunkte der Graphen der Funktion f_t mit der x-Achse. c) Untersuche den Graphen der Funktion f_t auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte. d) Auf welcher Kurve liegen die lokalen Maximumpunkte der Graphen aller Funktionen $f_{t,2}$? Gib eine Gleichung dieser Ortskurve an. e) Skizziere den Graphen der Funktion f_2 im Intervall $-5 \leq x \leq 5$. f) Die Punkte $P_1 \left(t; \frac{5}{9}t^2 \right)$, $P_2 (t\sqrt{6}; 0)$, $P_3 (-t\sqrt{6}; 0)$ liegen auf dem Graphen einer quadratischen Funktion. Ermittle eine Gleichung dieser quadratischen Funktion. g) Die Verbindungsgerade der beiden Maximum-Punkte des Graphen von f_2 schneidet die y-Achse im Punkt S. Der Punkt S und die beiden Kurvenpunkte $P \left(x_p; f_2(x_p) \right)$ und $Q \left(-x_p; f_2(-x_p) \right)$ mit $0 < x_p < 2\sqrt{3}$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks QPS. Für welchen Wert von x_p wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal? Gib den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks QPS an. h) Der Graph von f_1, die Tangente an den Graphen im Wendepunkt im 1. Quadranten und die x-Achse begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt $A(t)$. Berechne $A(t)$.</p>	<p>Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch</p> $f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2$ <p>a) Untersuche die Funktion f_t auf Symmetrie. b) Berechne die Schnittpunkte der Graphen der Funktion f_t mit der x-Achse. c) Untersuche den Graphen der Funktion f_t auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte. d) Skizziere den Graphen der Funktion f_2 im Intervall $-5 \leq x \leq 5$. e) Die Punkte $P_1 \left(t; \frac{5}{9}t^2 \right)$, $P_2 (t\sqrt{6}; 0)$, $P_3 (-t\sqrt{6}; 0)$ liegen auf dem Graphen einer quadratischen Funktion. Ermittle eine Gleichung dieser quadratischen Funktion. f) Die Verbindungsgerade der beiden Maximum-Punkte des Graphen von f_2 schneidet die y-Achse im Punkt S. Der Punkt S und die beiden Kurvenpunkte $P \left(x_p; f_2(x_p) \right)$ und $Q \left(-x_p; f_2(-x_p) \right)$ mit $0 < x_p < 2\sqrt{3}$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks QPS. Für welchen Wert von x_p wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal? Gib den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks QPS an.</p>

Abbildung 4: Vergleich Abiturprüfungen Aufgabenstellung

Nachdem die Abiturprüfung manipuliert wurde, sieht das Dateiverzeichnis des USB-Sticks so aus wie vor dem Vorfall, vergleiche hierfür Abbildung 5. Die einzige auf den ersten Blick sichtbare Änderung am Inhalt des USB-Sticks auf Dateiebene stellt das geänderte Änderungsdatum und die Dateigröße dar. Um diese Abweichung feststellen zu können, müsste jedoch die Originaldatei vorliegen, welche in diesem Fall der Schule nach der Manipulation nicht mehr vorliegt.

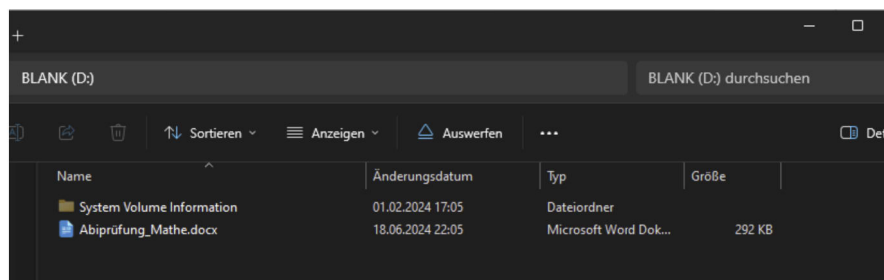


Abbildung 5: Dateiinhalte USB-Stick nach dem Vorfall



Abbildung 6: USB-Stick

3.2 Laptop

3.2.1 Ausgangslage

Der Täter setzt einen Laptop der Marke Lenovo im Rahmen des Vorfalls ein (siehe Abbildung 7 und Abbildung 8). Dieser wird mit dem Betriebssystem Microsoft Windows 10 betrieben (siehe Abbildung 9).

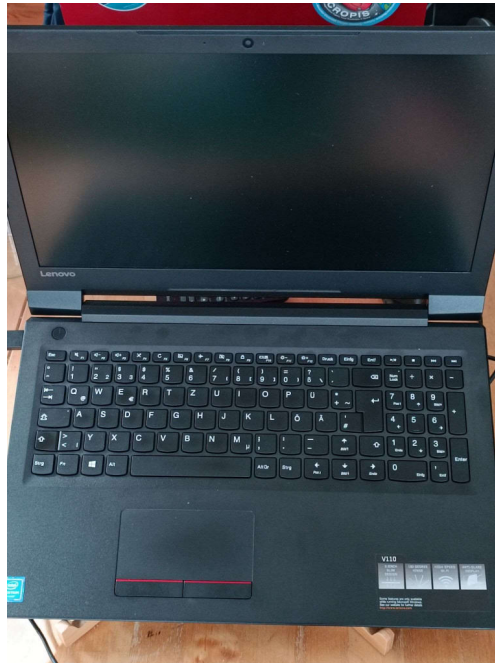


Abbildung 7: Geöffneter Laptop des fiktiven Täters



Abbildung 8: Oberseite (Deckel) des Laptops des fiktiven Täters

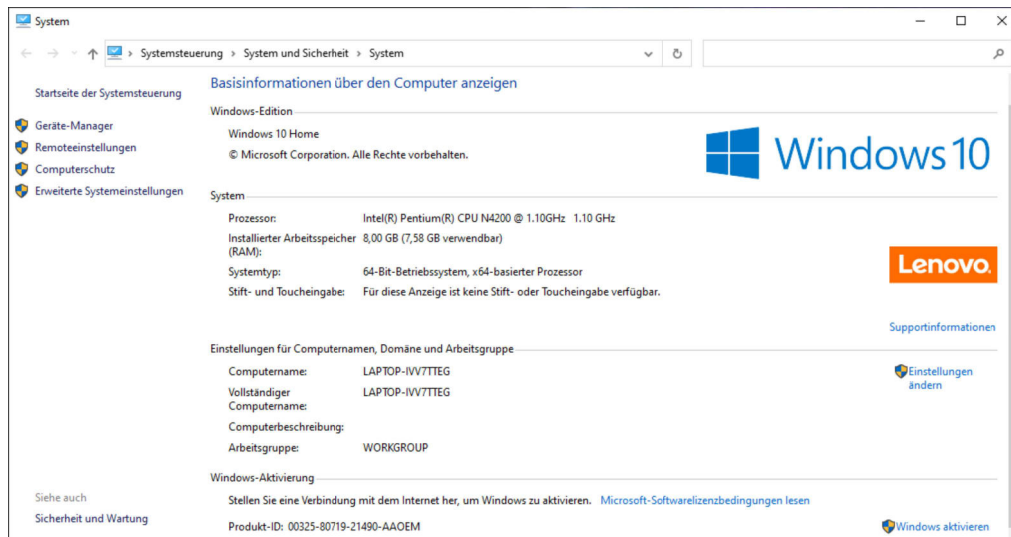


Abbildung 9: Systeminformationen des Betriebssystems des Laptops

Der Laptop verfügt lediglich über ein Laufwerk C, auf welchem sich unter anderem das Betriebssystem befindet. Für die Bearbeitung von Textdokumenten befindet sich u.a. das Programm Microsoft Office auf dem Laufwerk C.

3.2.2 Vorbereitung der Spuren

Der Täter hinterlässt während der Planung und Durchführung des Vorfalls auf seinem Laptop einige Spuren, welche von den Forensikern und Ermittlern nachverfolgt werden können. Diese Spuren werden nachfolgend gelegt.

Auf dem Laptop bzw. Desktop wurde ein Ordner angelegt, mit Bildern von der Schule, auf denen u.a. ein Fenster in der Nähe des Lehrerzimmers abgebildet ist und eine Aufnahme von oben mittels Google Maps. Der Ordner trägt den Namen "Abi Plan", siehe Abbildung 10.

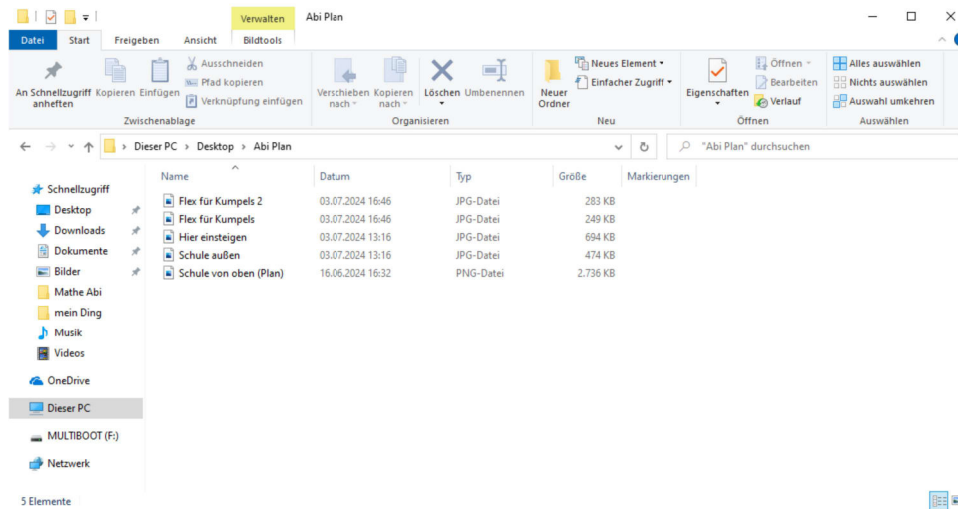


Abbildung 10: Inhalt des Desktops auf dem Laptop

In einem weiteren Ordner wurde eine Bilddatei platziert, auf der der Täter ein Selfie in seinem Kinderzimmer machte, siehe Abbildung 11. Dabei ist klar im Hintergrund die geöffnete Textdatei (Abiturprüfung) zu sehen, welche bei dem Einbruch in das Lehrerzimmer erbeutet werden konnte.



Abbildung 11: Das Bild "Flex für Kumpels 2.JPG"

In dem Ordner "Mathe Abi", welcher sich ebenfalls auf dem Desktop befindet, wurde die gestohlene Abiturprüfung abgelegt, einmal als Original und einmal die manipulierte Version in einem separaten Order "Mein Ding" (siehe Abbildung 12). Das Original stammt hierbei von dem erbeuteten USB-Stick und wurde auf dem Laptop entsprechend zugunsten des Täters verändert.

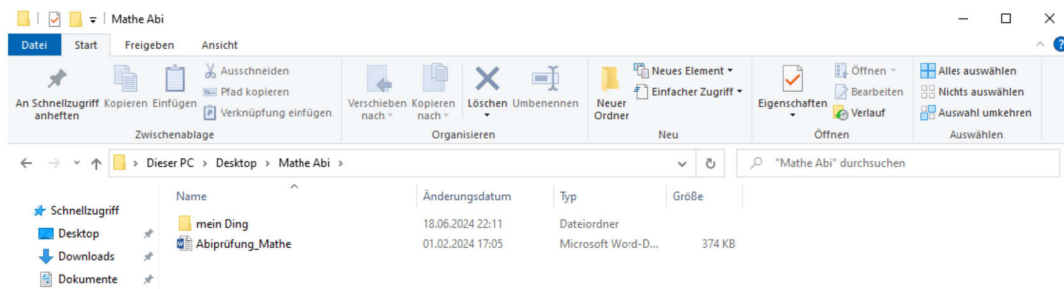


Abbildung 12: Die Abiturprüfung im Original und der Ordner mit der veränderten Version

Auf dem Desktop befindet sich eine Videodatei des Chatverlaufs des Täters mit anderen Schülern. Diese wurde mittels der IOS App "iTextStories" erstellt (siehe Abbildung 13). Mithilfe dieser App können Chats mit mehreren Personen nachgespielt werden. In dem nachgestellten Szenario/Chat, hatte der Täter in einem Chat die Abiturprüfung weiteren Mitschülern zum Kauf angeboten und mit der gestohlenen Abiturprüfung angegeben. Das Video von dem Chat wurde in diesem Szenario von dem Täter auf dem Laptop gespeichert, um den Verkauf der Abiturprüfung beweisen zu können, falls die Mitschüler nicht zahlen wollen.

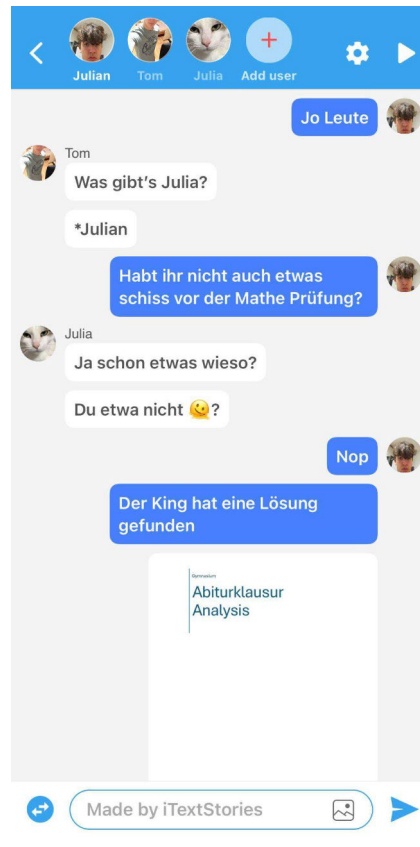


Abbildung 13: Auszug Chat

3.3 Ablauf der Spurenlegung

Zusammenfassend werden die folgenden Schritte durchgeführt, um die Untersuchungsobjekte mit Spuren auszustatten:

1. Formatieren des USB-Sticks mit Disk Wipe (siehe Kapitel 7.1)
2. Ändern der Systemzeit eines verfügbaren Laptops (Lenovo V110) auf einen Tag im Jahr 2022
3. Zurücksetzen von Windows 10 auf dem Laptop
4. Einrichten eines Nutzers "Julian" / "Julian König" in Windows 10 mit Passwort "KingJulian"

5. Ändern der Systemzeit am Laptop auf den Tag des fiktiven Tatzeitpunktes (18.06.2024)
6. Platzieren von Beweisen auf dem Laptop mit einem separaten USB-Stick (nicht das Untersuchungsobjekt)
7. während die Spuren am Laptop gelegt werden, wird gleichzeitig der USB-Stick wie im oben beschrieben eingesetzt
8. Ändern der Dateiattribute mit Attribute Changer, insbesondere der Zeitstempel für Dateierstellung und Dateiänderung der zuvor erzeugten Dateien. Dies ist notwendig, da die Dateien insgesamt von verschiedenen Team-Mitgliedern vorbereitet wurden. Durch die Kopieroperation werden ferner die Zeitstempel auf dem Zielsystem verändert.
9. Ausschalten und ändern der Systemzeit über das BIOS auf den 20.06.2024, also der Zeitpunkt, an dem das Asservat durch Forensik-Experten untersucht wird. Das System wird anschließend heruntergefahren.

3.3.1 Ändern der Dateiattribute (Zeitstempel) mit Hilfe von Attribute Changer

Attribute Changer ist eine frei verfügbare Software zum Ändern von Attributen, wie. z.B. Zeitstempeln von Dateien (siehe Abbildung 14). Es wurde benutzt, um die Spuren auf die richtigen Zeitpunkte zu legen, um diese später in der Analyse entsprechend einer Timeline glaubwürdig aufführen zu können. Die Software wurde bezogen von: <https://www.petges.lu/>

Einige Einschränkungen sind bei der Benutzung aufgefallen:

- Die Artefakte der Änderungen der Dateiattribute sind mit dem Analysewerkzeug sichtbar und werden in der Betrachtung ignoriert.
- Die Artefakte der Änderungen der Systemzeit sind mit dem Analysewerkzeug

sichtbar und werden in der Betrachtung ignoriert.

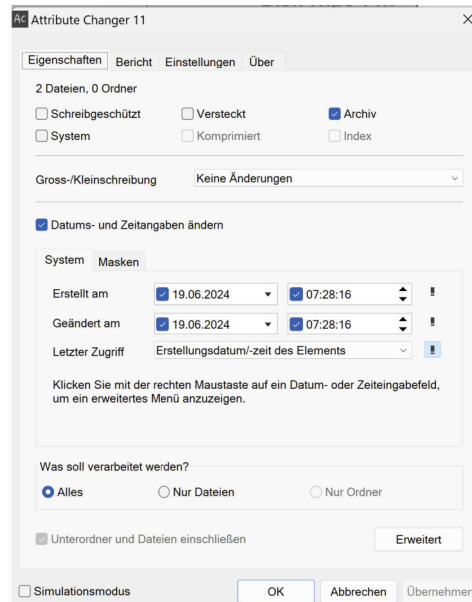


Abbildung 14: Benutzeroberfläche von Attribute Changer

4 Strategisch geplantes Vorgehen nach pSAP-Modell

In diesem Kapitel wird das strategisch geplante Vorgehen bei der Bearbeitung des Vorfalls beschrieben. Um die Untersuchung des IT-forensischen Vorfalls strukturiert und genormt vornehmen zu können, sowie die Chancen einer Gerichtsverwertbarkeit des Gutachtens zu erhöhen, wird bei diesem Vorfall auf das etablierte pSAP-Modell zurückgegriffen.

Das pSAP Modell ist eine Kombination aus dem SAP-Modell und BSI-Modell und besteht aus den in Abbildung 15 zu sehenden Phasen, welche um eine fortlaufende Dokumentation ergänzt werden.

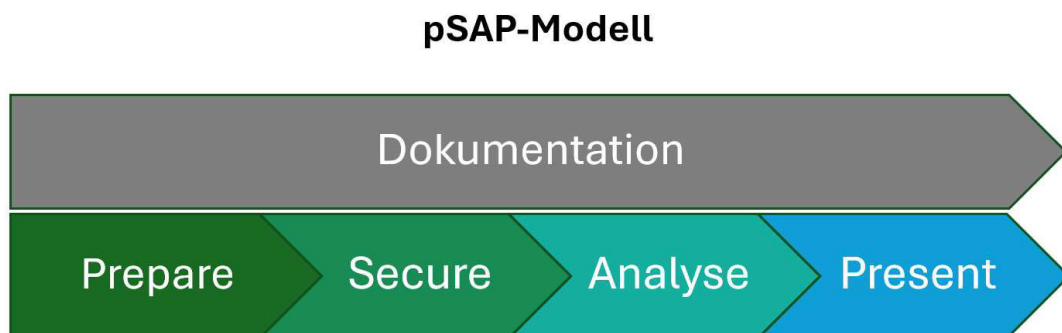


Abbildung 15: pSAP-Modell

4.1 Strategische Vorbereitung (Prepare)

Im Rahmen der strategischen Vorbereitung wird von den zuständigen Stellen qualifiziertes Personal, sowie entsprechende Technik, IT-forensische Software und Dokumentationsmittel in Erwartung eines Vorfalls vorgehalten. Hierunter fallen u.a. die

Ausstattung des Forensik-Koffers, sowie eine Liste von anerkannten Forensik-Softwares und die Schulung der Forensiker.

Der Forensik-Koffer enthält u.a. folgende Objekte:

- Verpackungsmaterialien
- Mouse Jiggler
- Laptop für Live-Forensik
- Speichermedien
- Büroklammer
- Kamera
- usw.

Auszug Liste anerkannter Forensik-Softwares:

- Magnet AXIOM
- FTK
- OSFClone
- SAFE Block
- usw.

4.2 Operationale Vorbereitung (Prepare)

In dieser Phase werden zunächst die tatsächlichen Gegebenheiten am Tatort dokumentiert. Im Anschluss erfolgt die Identifizierung der für den Vorfall relevanten Datenquellen. Dabei erfolgt eine eindeutige Kennzeichnung und Nummerierung der Datenquellen inklusive Dokumentation. Hierfür werden Bilder, Videos und Formulare genutzt. Insbesondere die Chain of Custody sollte bei der Aufklärung des Vorfalls stets eingehalten werden, um eine Gerichtsverwertbarkeit der Beweise sicherzustellen. Um dies zu gewährleisten, gibt es u.a. bestimmte Formulare, welche in der IT-Forensik

eingesetzt werden.

Im Rahmen des Vorfalls wurden folgende Datenquellen identifiziert:

- 01 USB-Stick
- 02 Laptop

Des Weiteren wird die für den Vorfall relevante Hard- und Software bestimmt. Da im Rahmen des Vorfalls bspw. keine Mobiltelefone gesichert und analysiert werden müssen, fällt die Hard- und Software von Cellebrite UFED zugunsten von u.a. Magnet AXIOM oder FTK aus der Liste.

Die an den zwei Fundorten (Schule und Elternhaus) identifizierten Datenquellen wurden für die Datensicherung in das IT-forensische Labor gebracht.

4.3 Datensicherung (Secure)

Die Datensicherung erfolgt im Anschluss an die Vorbereitungsphase. Es wurde sich entschieden, auf eine Datensicherung vor Ort zu verzichten und die Beweisquellen an das IT-forensische Labor zu überstellen, da zum einen am eigentlichen Tatort nur ein USB-Stick sichergestellt werden konnte und kein dringender Handlungsbedarf in Bezug auf die Herausgabe des USB-Sticks bestand, da die Abiturprüfung aufgrund der Ermittlungen landesweit ausgetauscht werden musste. Der Laptop konnte nicht vor Ort sichergestellt werden, da dieser nicht am Tatort zurückgelassen wurde. Der Laptop wurde im Rahmen einer Hausdurchsuchung bei dem Schüler Julian K. sichergestellt. Der Laptop befand sich zum Zeitpunkt der Sicherstellung im ausgeschalteten Zustand. Auch hier bestand kein dringender Handlungsbedarf bzgl. der Herausgabe des Laptops.

4.3.1 Technische Sicherungsreihenfolge

Die technische Sicherungsreihenfolge legt den Zeitpunkt fest, wann welche Art von Daten gesichert wird. Dabei ist folgendermaßen vorzugehen.

1. Flüchtige Daten
2. Semi-persistente Daten
3. Persistente Daten

Da der Laptop s.o. nur im ausgeschalteten Zustand vorlag, war lediglich eine Sicherung der *persistenten Daten* auf der Festplatte möglich. Auf dem USB-Stick konnten ebenfalls nur die *persistenten Daten* gesichert werden.

4.3.2 Imageerstellung und Hashwertbildung

Nachdem die technische Sicherungsreihenfolge geklärt ist, erfolgt die Datensicherung aus den Beweisquellen. Hierfür wurde jeweils von dem USB-Stick und dem Laptop (Festplatte) eine Master-Kopie auf einem jeweils gewipten Datenträger angefertigt in Form eines physischen Images. Dieses Master-Image dient im Anschluss als Basis für weitere Kopien (Arbeits-Images) für die anschließende Analyse. Um eine spätere Veränderung der Images zu verhindern und somit die Gerichtsverwertbarkeit der Beweise und Ergebnisse aus der Analyse zu gewährleisten, wird von den Images eine Hashwertbildung vorgenommen (Prüfsumme). Mithilfe der Hashwerte können Änderungen an den Images leicht nachgewiesen werden.

Da das Forensik-Team aufgrund der räumlichen Distanz nicht an einem Standort die Sicherung und darauf folgende Analyse vornehmen kann, wurden die Arbeitskopien über eine sichere private Cloud-Lösung an das Forensik-Team verteilt.

Die konkrete Vorgehensweise bei der Erstellung der Images für Asservat 01 und

Asservat 02 wird in Kapitel 1 erläutert.

4.3.3 Eingesetzte Hard- und Software

Für die Sicherung der Daten wurde auf spezielle Software zurückgegriffen.

- FTK Imager
- SAFE Block
- OSFClone
- Disk Wipe

4.4 Datenauswertung (Analyse)

In der Analysephase werden die in der Securephase gesammelten Daten ausgewertet und in einen Zusammenhang gebracht.

Um die Daten auswerten zu können, wird auf Arbeitskopien (s.o.) zurückgegriffen. Für die Prüfung der Integrität der Arbeitskopien werden der Hashwert der Masterkopie und die Hashwerte der Arbeitskopien verglichen. Da diese übereinstimmen, ist von der Integrität der benutzten Arbeitskopien auszugehen.

4.4.1 Vorgehensweise bei der Analyse

Im Rahmen der Analyse wird wie folgt vorgegangen:

1. Physische Analyse des Mediums
2. Suche nach logischen Laufwerken (Partitionen)
3. Analyse des Dateisystems (gespeicherte, gelöschte oder versteckte Daten identifizieren)
4. Auswertung der Dateien (sichten, filtern, bewerten und korrelieren)

Die praktische Analyse der Images von Asservat 01 und Asservat 02 kann in Kapitel

8.1 eingesehen werden.

4.4.2 Bilden einer Zeitbasis

Für die Analyse des Vorfalls ist es unerlässlich, eine einheitliche Zeitbasis für alle Datenträger-Images bzw. in diesem Fall für die Auswertung des USB-Sticks und Laptops (Festplatte) zu bestimmen. Nur so kann gewährleistet werden, dass die Timeline des Vorfalls über alle Asservate hinweg die richtigen Zeiten abbildet.

4.4.3 Eingesetzte Software

Für die Analyse der Daten wurde auf die IT-forensische Software Magnet AXIOM zurückgegriffen. Der mittels Magnet AXIOM erstellte forensische Untersuchungsbericht kann in Anhang B eingesehen werden.

4.5 Präsentation der Ergebnisse (Present)

Nachdem in den vorangegangenen Phasen alle Schritte entsprechend beschrieben und die Beweise ausgewertet werden konnten, erfolgt im Anschluss an die Analysephase die Präsentation der Ergebnisse. Im Rahmen dieses Vorfalls erfolgt die Präsentation der Ergebnisse in Form eines IT-forensischen Gutachtens. Dieses umfasste alle Ergebnisse, welche im Rahmen der IT-forensischen Untersuchung erlangt werden konnten, bezogen auf den Auftrag der Staatsanwaltschaft. Das Gutachten kann in Kapitel 5 eingesehen werden.

5 Gutachten

5.1 Deckblatt

Gutachten

in der IT-Forensik

Auftraggeber

Staatsanwaltschaft Saarbrücken

Herr Staatsanwalt Mustermann

Aktenzeichen Staatsanwaltschaft:

123 JS 4567/24

Aktenzeichen Polizei:

0123456/00123/2024

Erstellt von:

Justin Keil

Enrico Leutsch

Falk Nohka

Abschluss: 14.07.2024

5.2 Auftragsspezifikation

Durch die Staatsanwaltschaft Saarbrücken wird ein IT-forensisches Gutachten in Auftrag gegeben. Bestandteil des Gutachtens sind die nachfolgend aufgelisteten Asservate. Die vorläufige Bearbeitungsdauer beträgt 4 Wochen bzw. bis einschließlich 14.07.2024. Sollte während der Bearbeitungszeit der Kostenrahmen in Höhe von 20.000€ ausgeschöpft sein, hat dies eine Unterbrechung der Arbeit zur Folge. Bevor die Arbeit wieder aufgenommen werden kann, ist eine erneute Absprache mit der Staatsanwaltschaft Saarbrücken notwendig. Im Rahmen der Tatort- und Datensicherung wurden von der Polizei Saarbrücken Arbeitskopien der betroffenen Geräte/ Beweismittel angefertigt und mit Hashwerten versehen. Folglich liegen die Geräte nicht im Original vor.

Im Zusammenhang mit den bereitgestellten Asservaten sollen nachfolgende Fragestellungen aufgeklärt werden.

5.2.1 Asservat 01 (USB-Stick):

1. Welche Daten (z.B. Dokumente, Bilder, Videos, Audio-Dateien, Programme, Systemdateien, gelöschte Daten) befinden sich auf dem Datenträger?
2. Welche Änderungen wurden an den Daten vorgenommen, von wem und zu welchem Zeitpunkt?
3. Untersuchung auf mögliche Metadaten oder Spuren, die auf den Zeitpunkt und die Art der Manipulation hinweisen.
4. Dokumentation und Analyse der darauf befindlichen Dateien, primär der Abiturprüfungen.

5.2.2 Asservat 02 (Laptop):

1. Mit welcher Art von Betriebssystem wird der Laptop betrieben?
2. Welche Benutzerkonten befinden sich auf dem Gerät und waren zum Zeitpunkt der Tat in Benutzung?
3. Wurde der USB-Stick (Asservat 1) an den Laptop angeschlossen?
4. Analyse von Metadaten der Dateien, um den Zeitpunkt des Kopierens und der Bearbeitung zu bestimmen.
5. Überprüfung des Laptops auf weitere relevante digitale Spuren oder Hinweise, die auf die Durchführung der Tat hindeuten könnten. (Einschränkung auf Tatzeitraum? / Timeline)

5.3 Zusammenfassung der Ermittlungsergebnisse

In dieser Zusammenfassung präsentieren wir die wesentlichen Ergebnisse der Analysen des USB-Sticks und des Laptops, die im Rahmen des simulierten sicherheitsrelevanten Vorfalls durchgeführt wurden. Ziel war es, die Verbindung zwischen den beiden Asservaten und die Art der Datenmanipulation zu ermitteln.

5.3.1 Ergebnisse der Analysen

USB-Stick (Asservat 01):

Die forensische Untersuchung des USB-Sticks ergab eine verdächtige Datei, die Kopie der Abiturprüfung in verschiedenen Stadien der Bearbeitung. Metadatenanalysen zeigten, dass die Datei verändert und zu spezifischen Zeiten gespeichert wurde. Es wurden Spuren von einer gelöschten Datei gefunden, die durch spezielle forensische Methoden wiederhergestellt werden konnten.

Laptop (Asservat 02):

Die forensische Untersuchung des Laptops (Asservat 02) ergab, dass der USB-Stick während des Vorfalls mit dem Laptop verbunden war. Es wurde festgestellt, dass eine spezifische Datei von dem USB-Stick auf den Laptop übertragen, dort manipuliert und anschließend die manipulierte Version wieder auf den USB-Stick zurückkopiert wurde. Zusätzlich wurden auf dem Laptop Bilder zur Vorbereitung des Einbruchs und angegeben, sowie ein Videomitschnitt eines Chatverlaufs entdeckt, die relevante Informationen zum Vorfall liefern. Die Analyse des Dateisystems bestätigte zudem den Austausch der Prüfungsdatei im Rahmen des untersuchten Vorfalls.

5.3.2 Festgestellte Verbindungen und Zeitrahmen

1. Unmittelbarer Zusammenhang:

Es wurde zeitlich nachgewiesen, dass der USB-Stick (Asservat 01) und der Laptop (Asservat 02) während der Tatzeit in direktem Zusammenhang standen. Gemäß der Timeline wurde der USB-Stick zur Tatzeit an den Laptop angeschlossen und eine spezifische Datei wurde vom USB-Stick auf den Laptop übertragen, dort manipuliert und anschließend die manipulierte Version wieder auf den USB-Stick zurückkopiert.

2. Zeitpunkt des Zusammenwirkens:

Der Zeitpunkt des Zusammenwirkens beider Asservate wurde auf den 18.06.2024 im Zeitraum zwischen 21:41 MESZ und 22:10 MESZ datiert.

3. Datenübertragung:

Es wurde festgestellt, dass eine Transaktion von Daten vom USB-Stick (Asservat 01) auf den Laptop (Asservat 02) und umgekehrt stattgefunden hat.

4. Datenmodifikation:

Die Modifikation der Daten wurde mithilfe des Laptops (Asservat 02) durchgeführt.

5.3.3 Darstellung der Beweiskette und forensische Methoden

Die forensische Untersuchung folgte einer streng kontrollierten Beweiskette, um die

Integrität der Beweise zu gewährleisten:

1. Sicherung der Beweise:

Die forensische Sicherung des USB-Sticks (Asservat 01) und des Laptops (Asservat 02) erfolgte unter Verwendung eines softwarebasierten Write Blockers, um sicherzustellen, dass während des Sicherungsprozesses keine Veränderungen an den Originaldaten vorgenommen wurden. Zusätzlich wurden die Festplatten vor der Erstellung der Images durch gezieltes Löschen (Wiping) vorbereitet, um die Integrität der Beweise zu gewährleisten. Von den Originaldaten sowie den erstellten Images wurden MD5- und SHA256-Hashsummen gebildet, um deren Integrität nachzuweisen und sicherzustellen.

2. Erstellung von Forensik-Images:

Von beiden Geräten wurden bitgenaue Kopien (Images) erstellt, die als Grundlage für die weiteren Analysen dienen. Von den erstellten Images wurden MD5- und SHA256-Hashsummen gebildet und mit den Asservaten verglichen, um deren Eindeutigkeit nachzuweisen und sicherzustellen.

3. Analyse der Metadaten:

Die Metadaten der verdächtigen Dateien wurden analysiert, um Änderungen und Zugriffszeiten zu identifizieren.

4. Wiederherstellung gelöschter Dateien:

Spezielle forensische Tools wurden eingesetzt, um gelöschte Dateien wiederherzustellen und auf versteckte Daten zuzugreifen.

5. Überprüfung der Benutzeraktivitäten:

Eine detaillierte Analyse der Benutzeraktivitäten auf dem Laptop zeigte die Nutzung von Tools zur Manipulation und Verschleierung von Datenspuren.

6. Verbindung zwischen Geräten:

Die Verbindung zwischen dem USB-Stick und dem Laptop wurde nachgewiesen, wobei festgestellt wurde, dass beide Geräte am 18.06.2024 im Zeitraum zwischen 21:41

MESZ und 22:10 MESZ physisch zusammenarbeiteten.

7. Dokumentation und Bericht:

Alle Schritte der Untersuchung wurden detailliert dokumentiert, um eine lückenlose Beweiskette zu gewährleisten und die Ergebnisse transparent darzustellen.

5.4 Untersuchungsobjekte

Hier werden die Untersuchungsobjekte benannt, welche bei der Untersuchung des Vorfalls sichergestellt werden konnten.

Tabelle 1: Übersicht über die Untersuchungsobjekte im Fall 123 JS 4567/24

Objekt-Nr.	Name des Objektes	Hashwert
Asservat 01	USB Stick, Image des Datenträgers	MD5: 57f6eeff5cfc9410441a7549862ea6cf
Asservat 02	Laptop Lenovo V110, Image der Festplatte	MD5: 4d19c472a07ac8ce63890b735661d385

5.4.1 Asservat 01 (USB-Stick)



Abbildung 16: USB-Stick mit geschlossenem Schutzbügel



Abbildung 17: USB-Stick mit geöffnetem Schutzbügel

Das Asservat ist ein USB Massenspeichermedium (USB-Stick) ohne erkennbare Markierung durch den Hersteller. Es wurde funktionsfähig und unbeschädigt übergeben. Die Untersuchung wurde anhand eines forensischen Datenträgerabbildes (physical image) des Asservats durchgeführt.

5.4.2 Asservat 02 (Laptop)

Das Asservat ist ein Laptop der Marke Lenovo. Es wurde ohne Beschädigung, funktionsfähig, aber ausgeschaltet übergeben, ein Netzteil war nicht vorhanden. Es wurde kein Nutzernamen oder Passwort für den Zugriff übermittelt. Daher konnte keine Live-Forensik am System vorgenommen werden.



Abbildung 18: Laptop Oberseite

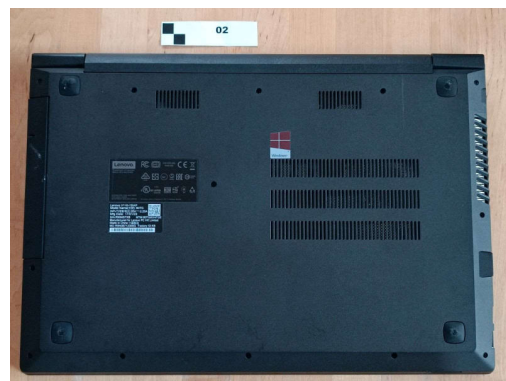


Abbildung 19: Laptop Unterseite



Abbildung 20: Laptop aufgeklappt



Abbildung 21: Laptop - Detail der Unterseite

5.5 Untersuchungswerkzeuge

Bei der Untersuchung der Asservate kamen die folgenden Werkzeuge zum Einsatz:

Tabelle 2: Übersicht über Untersuchungswerkzeuge

Name	Version	Funktion
Magnet AXIOM	8.2.0.40565	Analysewerkzeug für IT-Forensik
SAFE Block	1.0.0.109	Software Schreibschutz
Microsoft Word	Microsoft 365	Textverarbeitung
FTK Imager	4.7.1.2	Erstellen eines Datenträger-Abbilds (Image) des USB-Sticks
Disk Wipe	1.7	Löschen des Massenspeichermediums zur Image-Erstellung
OSFClone	1.4.1000	Erstellen eines Datenträger-Abbilds (Image) der internen Festplatte des Laptops

5.6 Untersuchung der Asservate

Im folgenden Abschnitt wird dargelegt, in welcher Reihenfolge die Asservate analysiert wurden, was die Zielstellung des jeweiligen Schrittes war und welche Erkenntnisse gewonnen wurden.

Die Asservate wurden in der Reihenfolge untersucht, wie sie nachfolgend durch die Gliederung aufgezeigt wird.

5.6.1 Asservat 01 (USB-Stick)

Das Asservat wurde zunächst fotografisch dokumentiert (siehe Abbildung 16 und 17). Um das Asservat digital-forensisch zu untersuchen, muss sichergestellt werden, dass keine Veränderungen am eigentlichen Asservat vorgenommen werden. Hierzu wurde ein forensisches Datenträgerabbild mit FTK-Imager erstellt, wobei ein

softwarebasiertes Werkzeug (SAFE Block) zum Einsatz kam, um sicherzustellen, dass das Asservat dabei nicht versehentlich manipuliert wird. Das Ergebnis ist das Datenträgerabbild und eine Textdatei mit extrahierten Informationen zum Datenträger (siehe Tabelle 3) .

Tabelle 3: Ausgewählte Eigenschaften des USB-Sticks

Eigenschaft	Wert
Modell / Bezeichnung	General UDisk USB Device
Schnittstellentyp	USB
Seriennummer	2310141704531295473406
Größe	500 MB
MD5 Hash	57f6eeff5cfc9410441a7549862ea6cf

Das Datenträgerabbild wurde daraufhin auf digitale Spuren und Artefakte mithilfe von Magnet AXIOM untersucht, um die Fragestellungen aus Kapitel 5.2 zu beantworten.

Die Analyse ergab, dass sich auf dem Datenträger eine Datei mit dem Namen Abiprüfung_Mathe.docx befindet. Die Datei enthält Aufgaben für eine Abiturprüfung im Fach Analysis (Mathematik), ausgegeben vom Ministerium für Bildung und Kultur. Die Datei wird in diesem Gutachten als *Textdatei 1* aufgeführt und weist die folgenden Eigenschaften auf (siehe Tabelle 4):

Tabelle 4: Eigenschaften der Datei Abprüfung_Mathe.docx (Textdatei 1)

Eigenschaft	Wert
Dateigröße	298.141 Bytes
Datum der Erstellung	08.01.2024, 14:28:47 MEZ
Datum der letzten Änderung	18.06.2024, 22:05:24 MESZ
MD5 Hash	979430fe31bc47749ec28f99ce592c84

Weiterhin wurde eine gelöschte Datei identifiziert, die ebenfalls den Namen Abprüfung_Mathe.docx trägt, jedoch konnte diese nicht wiederhergestellt werden. Dies deutet darauf hin, dass es sich um eine ältere Version der oben aufgeführten Datei handelt, die beim Speichern überschrieben wurde.

Name	Typ	Date...	Größ...	Gelö...	Erstellt	Modifiziert
System Volume Information	Folder				30.06.2022 19:16:00,000	01.02.2024 18:05:22,000
Abprüfung_Mathe.docx	Image	.docx	298.141		08.01.2024 14:28:47,000	18.06.2024 22:05:24,000
\$diskwipe	Folder			Gelöscht	30.06.2024 19:16:00,240	30.06.2024 19:16:02,000
Abprüfung_Mathe.docx	Image	.docx	0	Gelöscht	06.07.2024 14:40:10,720	06.07.2024 14:40:12,000
UnallocatedSpace	Unallocated Sp...		523.665.408			

Abbildung 22: Auf dem Datenträger befindliche Objekte

5.6.2 Asservat 02 (Laptop)

Das Asservat wurde nach der Übergabe fotodokumentiert. Des Weiteren wurden wichtige Informationen zum Gerät festgehalten (siehe Tabelle 5).

Tabelle 5: Informationen zum Gerät (Laptop)

Eigenschaft	Wert
Hersteller	Lenovo PC HK Ltd.
Modell / Bezeichnung	V110-15IAP
Seriennummer	R90MSTXB
Herstellungsdatum	23.01.2017

Die Untersuchung findet nicht am laufenden System statt, daher muss zunächst ein forensisches Datenträgerabbild der internen Festplatte erzeugt werden, an dem die Untersuchung durchgeführt wird. Mithilfe von OSFClone wurde ein Datenträgerabbild erstellt und anschließend mit Magnet AXIOM untersucht. Dabei wurden die folgenden Schritte durchgeführt, um die Fragestellung in Kapitel 5.2 zu klären:

1. Analyse des Datenträgerabbilds
2. Filtern der von der Software gefundenen Artefakte auf den Zeitraum zwischen 12.06.2024, 00:00 MESZ und 20.06.2024, 09:00 MESZ
3. Suche nach Ereignissen des Betriebssystems in Bezug auf externe Speichermedien
4. Erfassen der relevanten Ereignisse im Zusammenhang mit einem Speichermedium, das Eigenschaften von Asservat 01 enthält (Modell / Bezeichnung, Seriennummer)
5. Suche nach Dateien auf der Festplatte, die den Schlüsselwörtern "abi", "abiprüfung", "mathe" entsprechen.
6. Abgleich der gefundenen Datei-Artefakte mit denen auf Asservat 01 und Erfassen von relevanten Daten für den Vergleich von Spuren auf Asservat 01

und Asservat 02.

7. Recherche zu weiteren Hinweisen auf weitere involvierte Personen

8. Recherche zu weiteren Spuren im Zusammenhang mit der Tat

Der Laptop nutzt das Betriebssystem Windows 10. Detaillierte Angaben zum Betriebssystem befinden sich in Tabelle 6.

Tabelle 6: Details zum Betriebssystem von Asservat 02

Eigenschaft	Wert
Betriebssystem	Windows 10 Home (2009)
Versionsnummer	6.3
Build	19042
Produktschlüssel	N9M6T-VC4VC-D2M9W-XCM43- MDWVD
Installiert / aktualisiert	26.09.2022 14:02:18
Besitzer	Julian
Benutzerkonto	Julian

Es wurden folgende für den Fall relevante Dateien wurden auf dem Datenträger gefunden, auf die im Folgenden eingegangen wird:

- Windows\Users\Julian\Desktop\Mathe-Abi\Abiprüfung_Mathe.docx
- Windows\Users\Julian\Desktop\Mathe-Abi\mein Ding\Abiprüfung_Mathe.docx
- Windows\Users\Julian\Desktop\Mathe-Abi\Plan\Schule außen.JPG
- Windows\Users\Julian\Desktop\Mathe-Abi\Plan\Schule von oben (Plan).png

- Windows\Users\Julian\Desktop\Mathe-Abi\Plan\Hier einsteigen.JPG
- Windows\Users\Julian\Desktop\Mathe-Abi\Plan\Flex für Kumpels.JPG
- Windows\Users\Julian\Desktop\Mathe-Abi\Plan\Flex für Kumpels 2.JPG
- Windows\Users\Julian\Desktop\Verkauf.mp4

Auf dem Laptop wurden zwei Textdokumente (Microsoft Word) mit dem Namen *Abiprüfung_Mathe.docx* in zwei unterschiedlichen Ordnern gefunden. Die Dateien unterscheiden sich in den Eigenschaften, wie in Tabelle 7 ersichtlich ist, und im Inhalt. Sie werden im Folgenden als *Textdatei 2* und *Textdatei 3* bezeichnet. Um die inhaltlichen Unterschiede der Textdateien 2 und 3 sichtbar zu machen, wurde Microsoft Word verwendet. Dies ist in Abbildung 23 und Abbildung 24 dargestellt.

Tabelle 7: Eigenschaften der Textdateien

Eigenschaft	Textdatei 2	Textdatei 3
Ordner	Windows\Users\Julian\Desktop\Mathe Abi\	Windows\Users\Julian\Desktop\Mathe Abi\mein Ding\
Name	Abiprüfung_Mathe.docx	Abiprüfung_Mathe.docx
Datum der Erstellung	18.06.2024 22:10:27	18.06.2024 22:10:27
Datum der letzten Änderung	01.02.2024 17:05:22	18.06.2024 22:05:24
Größe	382.110	298.141
MD5 Hash	c518aea778b2d7a1c1d583083e130d3d	979430fe31bc47749ec28f99ce592c84

Der Vergleich der beiden Textdateien ergibt, dass an verschiedenen Stellen Änderungen im Dokument vorgenommen wurden.

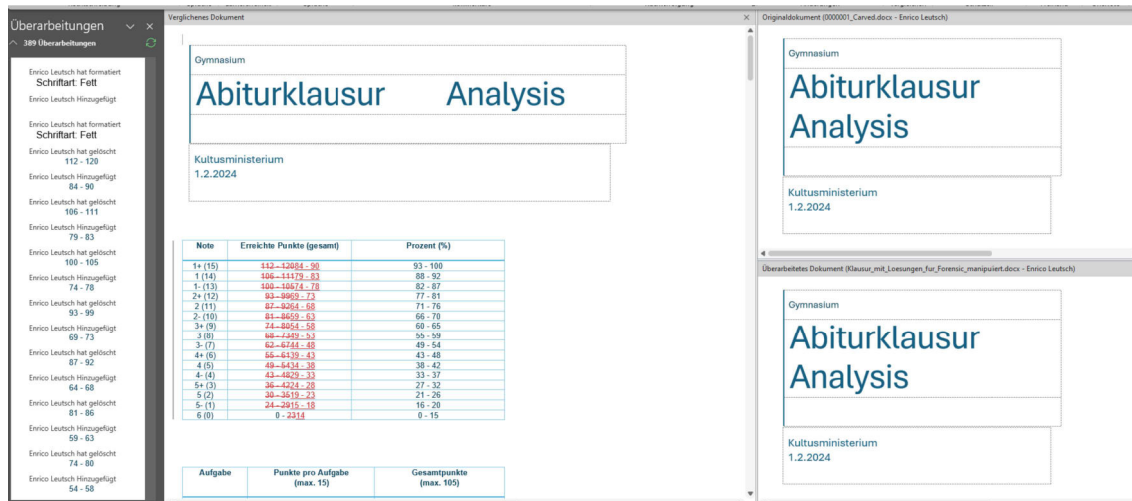


Abbildung 23: Unterschiede der Textdateien 2 und 3 - Teil 1

Aufgabe-g	45	105
Aufgabe-h	45	120

Analysis Aufgabe 01 1/23

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2$$

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2$$

- a) Untersuche die Funktion f_t auf Symmetrie.
- b) Berechne die Schnittpunkte der Graphen der Funktion f_t mit der x -Achse.
- c) Untersuche den Graphen der Funktion f_t auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte.
- d) Auf welcher Kurve liegen die lokalen Maximumpunkte der Graphen aller Funktionen f_t ?
— Gib eine Gleichung dieser Ortskurve an.
- e) Skizziere den Graphen der Funktion f_2 im Intervall $-5 \leq x \leq 5$.

f) Die Punkte $P_1 \left(\frac{5}{9}; \frac{5}{9} \right)$, $P_2 \left(\frac{5}{9}; \frac{5}{9} \right)$, $P_3 \left(t\sqrt{6}; 0 \right)$, $P_4 \left(-t\sqrt{6}; 0 \right)$ liegen auf dem Graphen einer quadratischen Funktion. Ermittle eine Gleichung dieser quadratischen Funktion.

g) Die Verbindungsgerade der beiden Maximum-Punkte des Graphen von f_2 schneidet die y -Achse im Punkt S.



Der Punkt S und die beiden Kurvenpunkte $P \left(x_p; f_2(x_p) \right)$ und $Q \left(-x_p; f_2(-x_p) \right)$ mit $0 < x_p < 2\sqrt{3}$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks QPS.


Abbildung 24: Unterschiede der Textdateien 2 und 3 - Teil 2

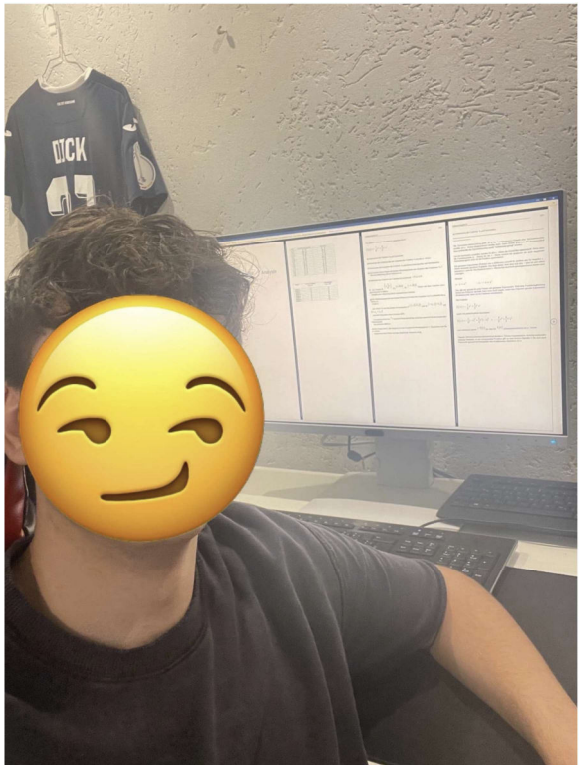
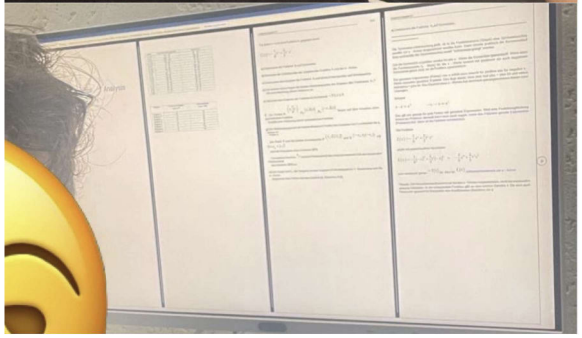
Darüber hinaus wurden auf dem Datenträger Mediendateien gefunden, die mit der Tat

in Verbindung stehen, diese sind in Tabelle 8 aufgeführt.

Tabelle 8: auf Asservat 02 gefundene Mediendateien

Informationen zur Datei		Darstellung der Datei							
<table border="1"> <tr> <td>Name</td> <td>Schule außen.JPG</td> </tr> <tr> <td>Datum der Erstellung</td> <td>16.06.2024 16:32:06</td> </tr> <tr> <td>Typ</td> <td>Bild, jpg</td> </tr> <tr> <td>Größe</td> <td>484.570 Bytes</td> </tr> </table>	Name	Schule außen.JPG	Datum der Erstellung	16.06.2024 16:32:06	Typ	Bild, jpg	Größe	484.570 Bytes	
Name	Schule außen.JPG								
Datum der Erstellung	16.06.2024 16:32:06								
Typ	Bild, jpg								
Größe	484.570 Bytes								
<table border="1"> <tr> <td>Name</td> <td>Schule von oben (Plan).png</td> </tr> <tr> <td>Datum der Erstellung</td> <td>16.06.2024 16:32:06</td> </tr> <tr> <td>Typ</td> <td>Bild, png</td> </tr> <tr> <td>Größe</td> <td>2.800.833 Bytes</td> </tr> </table>	Name	Schule von oben (Plan).png	Datum der Erstellung	16.06.2024 16:32:06	Typ	Bild, png	Größe	2.800.833 Bytes	
Name	Schule von oben (Plan).png								
Datum der Erstellung	16.06.2024 16:32:06								
Typ	Bild, png								
Größe	2.800.833 Bytes								

Informationen zur Datei		Darstellung der Datei
Name	Hier einsteigen.JPG	
Datum der Erstellung	16.06.2024 16:32:06	
Typ	Bild, jpg	
Größe	710.448 Bytes	

Informationen zur Datei		Darstellung der Datei
Name	Flex für Kumpels.JPG	 
Datum der Erstellung	19.06.2024 07:42:15	
Typ	Bild, jpg	
Größe	254.599	
Bemerkung	Auf dem Bildschirm im Hintergrund wird der Inhalt der Datei Abipruefung_Mathe.doc x angezeigt (siehe Ausschnitt).	

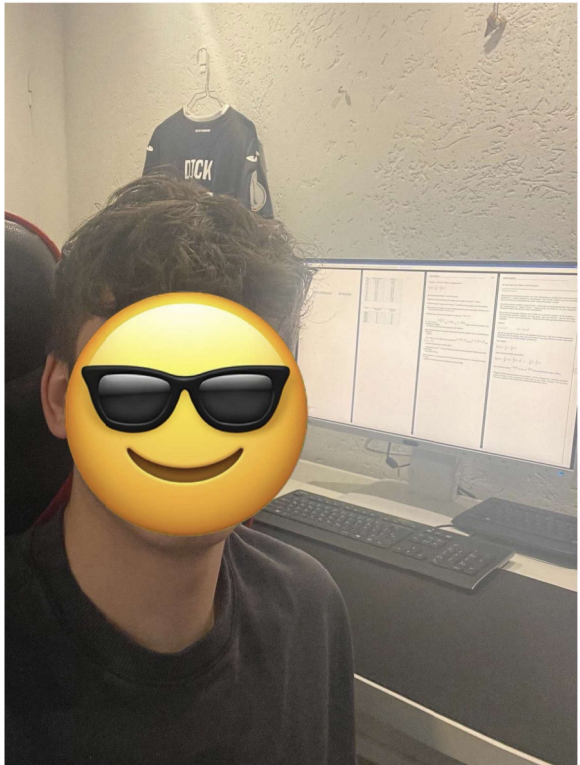
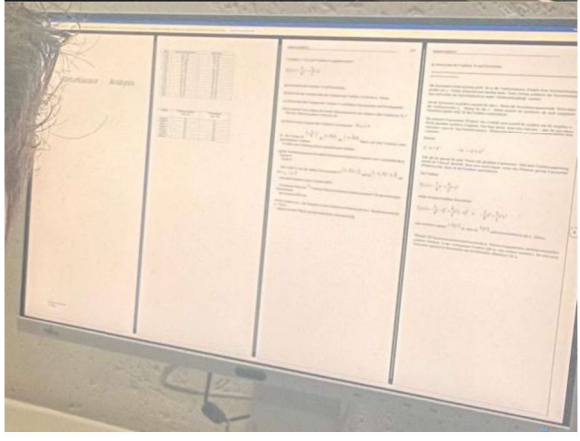
Informationen zur Datei		Darstellung der Datei
Name	Flex für Kumpels 2.JPG	 
Datum der Erstellung	19.06.2024 07:42:15	
Typ	Bild, jpg	
Größe	289.716	
Bemerkung	Auf dem Bildschirm im Hintergrund wird der Inhalt der Datei Abipruefung_Mathe.doc x angezeigt (siehe Ausschnitt).	

Tabelle 9: Übersicht über relevante Ereignisse des Betriebssystems

Zeitpunkt	Ereignis	Beschreibung
18.06.2024, 21:40:23	Storage Device General UDisk Connected	USB Massenspeichergerät "General UDisk" angeschlossen. Seriennummer: 2310141704531295473406
18.06.2024, 21:42:07	Anwendung Microsoft Office Winword.exe	Öffnen einer Datei mit Microsoft Word 2016. Datei: C:\Users\Julian\Desktop\Mathe Abi\ Abiprüfung_Mathe.docx
18.06.2024, 22:10:47	Anwendung Microsoft Office Winword.exe	C:\Users\Julian\Desktop\Mathe Abi\mein Ding\ Abiprüfung_Mathe.docx
18.06.2024, 22:12:21	Storage Device General UDisk Connected	USB Massenspeichergerät "General UDisk" angeschlossen. Seriennummer: 2310141704531295473406
18.06.2024, 22:12:21	Hardware kann jetzt entfernt werden	Entfernen von "USB-Massenspeichergerät".

5.6.3 Zusammenhänge und Timeline

Im Folgenden wird ein Zusammenhang im zeitlichen Verlauf der auf den Asservaten festgestellten Spuren dargelegt. Die Spuren und deren Zusammenhänge werden in zeitlicher Abfolge in Tabelle 10 aufgeführt.

Tabelle 10: Zeitachse / Timeline der Ereignisse

Datum, Uhrzeit	Ereignis / Bemerkung
08.01.2024, 14:28:47 MEZ	Datum der Erstellung von <i>Textdatei 1</i> und <i>Textdatei 2</i>
01.02.2024, 17:05:22 MEZ	Datum der letzten Änderung von <i>Textdatei 2</i>

16.06.2024, MESZ	16:32:06	Datum der Erstellung der Bilddateien <ul style="list-style-type: none"> • <i>Schule außen.JPG</i> • <i>Schule von oben (Plan).png</i> • <i>Hier einsteigen.JPG</i>
18.06.2024, MESZ	21:40:23	lt. Protokoll des Betriebssystems von <i>Asservat 02</i> wird ein USB Massenspeichergerät mit dem Namen "General UDisk" mit der Seriennummer 2310141704531295473406 angeschlossen.
18.06.2024, MESZ	21:42:07	Öffnen von <i>Textdatei 2</i> auf <i>Asservat 02</i> mit Microsoft Word 2016.
18.06.2024, MESZ	22:05:24	Datum der letzten Änderung von <i>Textdatei 1</i> und <i>Textdatei 3</i> .
18.06.2024, MESZ	22:10:27	Datum der Erstellung von <i>Textdatei 2</i> und <i>Textdatei 3</i> .
18.06.2024, MESZ	22:12:21	Das zuvor bereits angeschlossene USB Massenspeichergerät "General UDisk" mit der Seriennummer 2310141704531295473406 wird erneut angeschlossen. Gleichzeitig protokolliert das Betriebssystem auf <i>Asservat 02</i> das Entfernen eines USB Massenspeichergerätes.
19.06.2024, MESZ	07:40:41	Die Videodatei <i>Verkauf.mp4</i> wird erstellt.
19.06.2024, MESZ	07:42:15	Die Bilddateien <i>Flex für Kumpels.JPG</i> und <i>Flex für Kumpels 2.JPG</i> werden erstellt.

Zusammenhänge und Erkenntnisse:

- Die Seriennummer des vom Betriebssystem auf *Asservat 02* registrierten USB Massenspeichergeräts und die Seriennummer von *Asservat 01* sind identisch.

Es ist daher davon auszugehen, dass der USB-Stick (*Asservat 01*) in der Nacht vom 18.06.2024 zum 19.06.2024 mit dem Laptop (*Asservat 02*) verbunden wurde.

- Die MD5-Hashwerte von *Textdatei 1* und *Textdatei 3* sind identisch, wie auch die Zeitstempel der letzten Änderung der beiden Dateien.
- *Textdatei 2* unterscheidet sich von den beiden anderen in Inhalt und Zeitstempeln, es liegt daher nahe, dass es sich hierbei um die auf *Asservat 01* ursprünglich befindliche Datei handelt. Hierfür spricht vor allem der Zeitpunkt der letzten Änderung am 01.02.2024, der auch mit dem im Dokument selbst festgehaltenen Datum übereinstimmt.
- *Textdatei 3* ist eine spätere Version des mutmaßlichen Originals (*Textdatei 2*) und wurde vermutlich ebenfalls direkt auf dem USB-Stick (*Asservat 01*) als *Textdatei 1* abgespeichert.
- Bei der in den Bilddateien *Flex für Kumpels.JPG* und *Flex für Kumpels 2.JPG* auf dem Bildschirm dargestellte Textdatei handelt es sich vermutlich um *Textdatei 2*, da hier die Bewertungstabelle noch acht (8) Zeilen aufweist (Aufgaben a-g) und in der Aufgabenübersicht noch alle Aufgaben aufgeführt werden, siehe Abbildung 25 und Abbildung 26.
- Im aufgezeichneten Chat in *Verkauf.mp4* bietet der Nutzer Julian, aus dessen Perspektive die Aufzeichnung erfolgt, den anderen Teilnehmern der Unterhaltung Tom und Julia an, die Abiturklausur im Fach Mathematik (Analysis) für 100€ zu kaufen. Als Beweis legt der Nutzer Julian ein Bild des Deckblatts der Klausur vor. Dieses stimmt inhaltlich mit den ersten Seiten von *Textdatei 1*, *Textdatei 2* und *Textdatei 3* überein. Beide, Julia und Tom, gehen auf das Angebot ein.

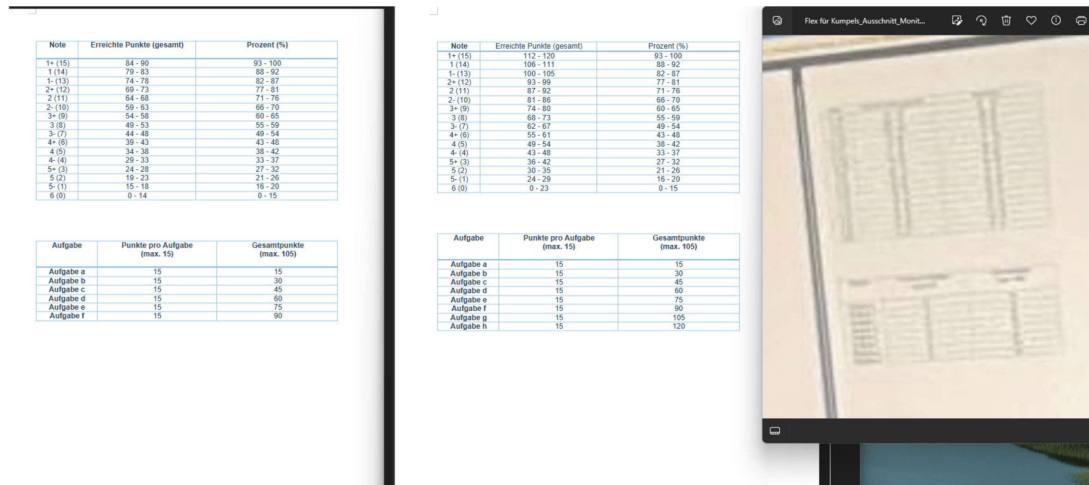


Abbildung 25: Vergleich von Textdatei 3 und Textdatei 2 mit Ausschnitt aus der Bilddatei Flex für Kumpels.JPG Teil 1

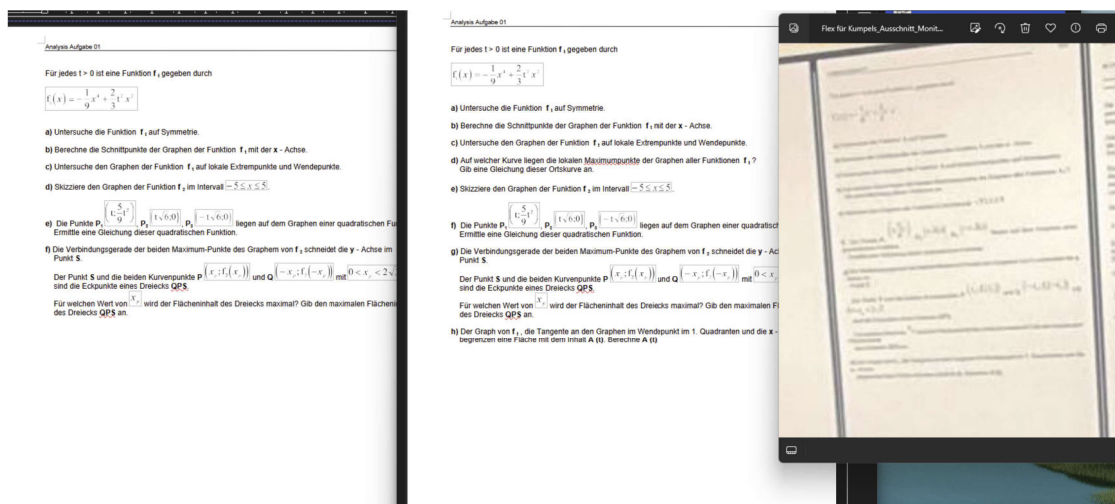


Abbildung 26: Vergleich von Textdatei 3 und Textdatei 2 mit Ausschnitt aus der Bilddatei Flex für Kumpels.JPG Teil 2

5.7 Abschließende Bemerkungen

In dem Gutachten über die Untersuchung der übergebenen Asservate sind nur die für die Tat relevanten Informationen aufgeführt und aufbereitet. Weitere Daten und

Informationen auf den Asservaten, die nicht im Zusammenhang mit der Tat stehen, stehen unter dem Schutz der Persönlichen Freiheit nach GG Art. 2 i.V.m. GG Art. 1, dem Schutz des Post-, Brief- und Fernmeldegeheimnisses nach GG Art. 10, sowie nach DSGVO und wurden nicht ausgewertet.

Die Daten der anderen Gesprächsteilnehmer (Julia und Tom) aus dem aufgezeichneten Chatverlauf in Verkauf.mp4 wurden nicht verifiziert, da hierzu keine Daten oder Asservate vorlagen oder übergeben wurden.

5.8 Anlagen

Als Anlagen sind dem Gutachten die oben beschriebenen Dateien auf einem USB-Stick beigelegt.

6 Zusammenfassung und Schlussbemerkung

Im Rahmen dieser Modularbeit wurde das fiktive Szenario Abiturprüfungsdiebstahl inszeniert, um dieses im Anschluss mittels IT-forensischer Methoden und Werkzeuge aufzuklären. Hierbei erfolgte zunächst die Beschreibung des fingierten Vorfalls, gefolgt von der Aufklärung des Vorfalls. Im Anschluss an die Erstellung des Vorfalls erfolgte die technische Inszenierung der Tat. Hierbei wurden alle Spuren des Täters gelegt, die zur Aufklärung und Nachvollziehbarkeit des Vorfalls beitragen sollten. Um die IT-forensische Untersuchung des Vorfalls mit bewährten Methoden der IT-Forensik durchführen zu können, wurde für die Aufklärung des Vorfalls auf das pSAP Modelle gesetzt. Nachdem das Vorgehen beschrieben wurde, erfolgte auf Basis der fingierten Beweise die Erstellung eines IT-forensischen Gutachtens. Im Rahmen der Erstellung des Gutachtens wurden die sichergestellten Images der Asservate untersucht und in einen Zusammenhang gebracht. Im Anschluss an das Gutachten erfolgte die detaillierte Beschreibung der Erstellung der Images der Asservate. Abschließend wurde die IT-forensische Analyse dieser Images detailliert wiedergegeben. Weitere relevante Informationen, wie z.B. der forensische Untersuchungsbericht aus Magnet AXIOM, wurden im Anhang der Modularbeit beigefügt.

Die Modularbeit wurde von drei Personen als Forensik-Team verfasst, was Einfluss auf die Textgestaltung und den Schreibstil der Modularbeit hatte.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die durchgeführten Analysen mehrere wichtige Erkenntnisse erbracht haben. Die Artefakte der Änderungen der Dateiattribute und der Systemzeit wurden mit dem verwendeten Analysewerkzeug sichtbar gemacht, jedoch in der weiteren Betrachtung nicht weiter mit einbezogen. Gleiches gilt für die über das Analysewerkzeug sichtbaren Artefakte von Nutzern, die vor dem

Zurücksetzen des Windows-Systems existierten.

Des Weiteren wurden Abweichungen bei Attributen festgestellt, die durch Anwenderfehler bei der Nutzung von Attribute Changer verursacht wurden. Diese logischen Fehler wurden dokumentiert, um die Genauigkeit der Analyse zu gewährleisten. Richtigerweise wurden keine Änderungen der Metadaten von Dokumenten oder Dateien, wie beispielsweise EXIF-Daten, festgestellt, was die Integrität der untersuchten Dateien bestätigt.

Dadurch, dass das Forensik-Team dezentral an verschiedenen Standorten beheimatet war, war die analoge Verteilung der Masterkopie bzw. Arbeitskopien der Images nicht möglich. Als Alternative wurde eine Verteilung via private Cloud umgesetzt. So konnte das gesamte Forensik-Team die gesicherten Beweise untersuchen. Da vor der Untersuchung ein Hashwert-Vergleich von Arbeits-Images und Master-Image unternommen wurde, konnte die Integrität der Arbeitskopien bestätigt werden und somit ebenfalls die Gerichtsverwertbarkeit der Beweise.

Eine Live-Forensik konnte im Rahmen des Vorfalls für Asservat 02 nicht durchgeführt werden, da der Laptop zum Zeitpunkt der Analyse ausgeschaltet war. Die Durchführung einer Live-Forensik erfordert ein laufendes System, um volatile Daten wie den Arbeitsspeicherinhalt, laufende Prozesse und Netzwerkverbindungen in Echtzeit analysieren zu können. Diese Daten sind nur während des Betriebs zugänglich und gehen bei einem Neustart oder Ausschalten des Systems verloren. Daher war eine Analyse im ausgeschalteten Zustand des Geräts nicht möglich und es musste auf eine Post-mortem-Analyse zurückgegriffen werden.

Ergänzend zur Hauptanalyse wurde testweise auch ein anderes Analysewerkzeug, OSForensics, verwendet, siehe Abbildung 27. Dieses bot teilweise eine bessere Übersicht und einen schnelleren Zugang zu bestimmten Artefakten, was auf mögliche

Optimierungen in zukünftigen Analysen hinweist.

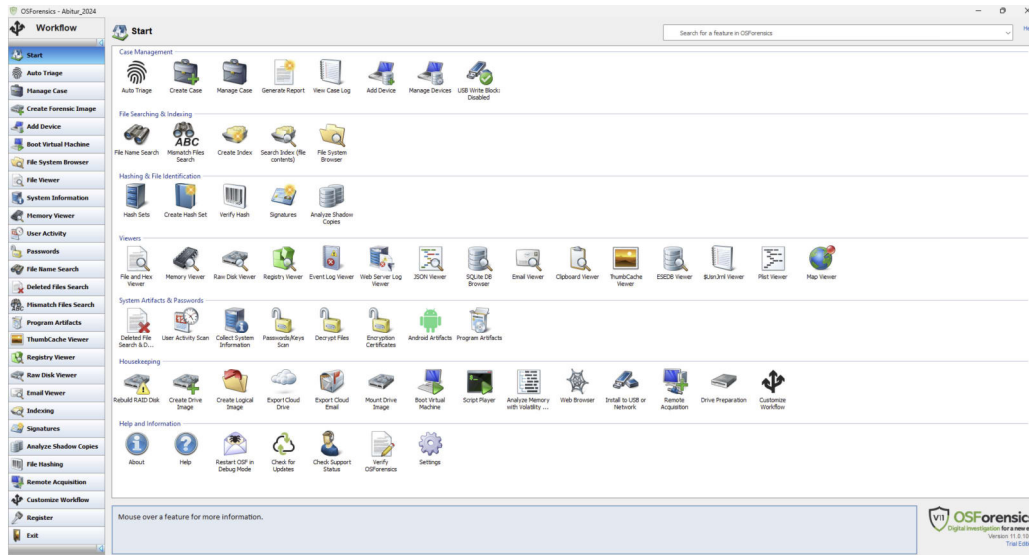


Abbildung 27: Benutzeroberfläche von OSForensics

Abschließend lässt sich festhalten, dass im Rahmen der Modularbeit insgesamt u.a. durch die Kombination verschiedener Analysewerkzeuge und der Berücksichtigung potenzieller Fehlerquellen belastbare Ergebnisse erzielt werden konnten, welche eine fundierte Grundlage für die IT-forensische Untersuchung und Erstellung des Gutachtens geboten haben. Somit ist anzunehmen, dass die Aufgabenstellung der Modularbeit als erfolgreich umgesetzt anzusehen ist. Des Weiteren konnten die Ersteller der Modularbeit die im Rahmen des Moduls “Forensik in Betriebs- und Anwendungssystemen” erlernten Kenntnisse, Untersuchungstechniken und Werkzeuge erfolgreich anwenden.

Die in der Arbeit verwendeten Fotos, auf denen darstellende Personen abgebildet sind und zum Zwecke der Fallkonstruktion verwendet wurden, wurden zu deren Schutz verfremdet.

7 Erzeugung eines Datenträgerabbildes

7.1 Vorbereitung des Datenträgers für die forensischen Images

Ein "sauberes" Speichermedium wird benötigt, um ein Abbild der Festplatte des Laptops zu erstellen.

Es wird Disk Wipe v1.7 zur Vorbereitung des USB Speichermediums für die Imageerstellung am Asservat "Laptop" genutzt. Der Prozess ist in Abbildungen 28 bis 35 dargestellt. Disk Wipe ist ein freies Werkzeug für das sichere Löschen von Datenträgern und kann unter <https://www.diskwipe.org/> abgerufen werden.

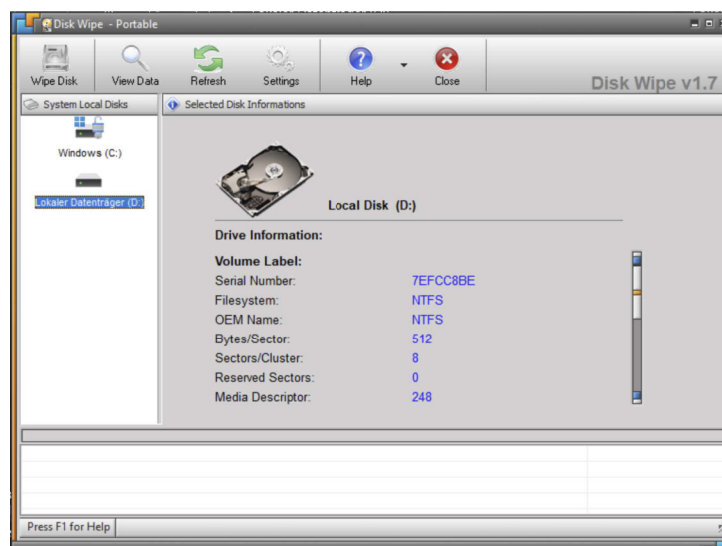


Abbildung 28: Identifikation des korrekten Datenträgers

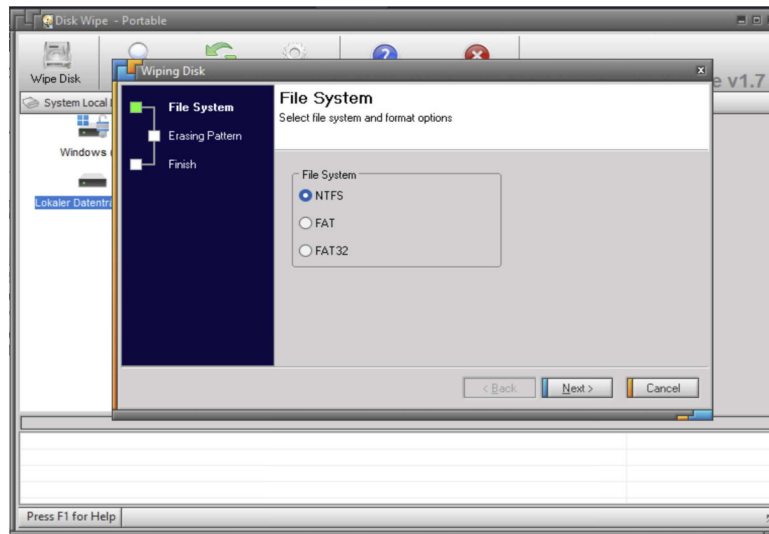


Abbildung 29: Der Datenträger wird mit NTFS Dateisystem formatiert

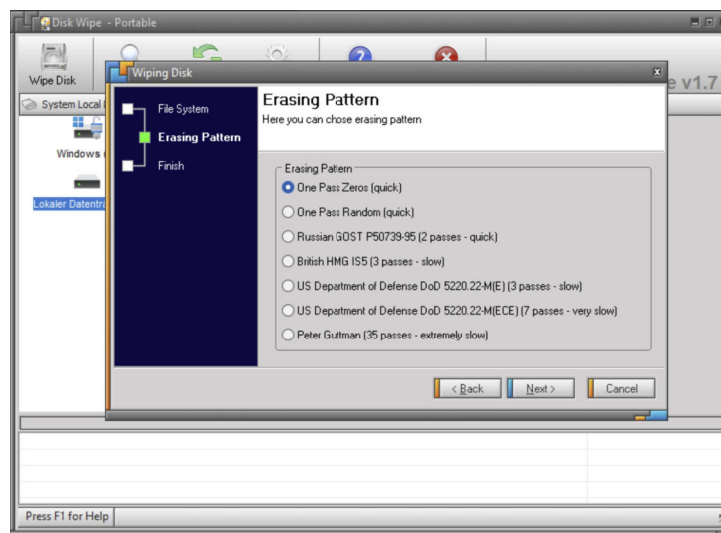


Abbildung 30: Auswahl der Löschmethode

Das Löschen wird zunächst als Low-Level Formatierung und anschließende Löschoption ausgeführt. Die Löschoption wird als Single Pass Operation ausgeführt, da es sich um einen Flash-Speicher handelt, bei dem ein einfaches Löschen der Speicherzellen (Schreiben von Nullen (0)) mögliche zuvor vorhandene Daten unwiderruflich löscht, laut *NIST 800-88*.

=> <https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/specialpublications/nist.sp.800-88r1.pdf>

=> <https://www.bitraser.com/article/multiple-passes-necessary-data-erasure.php>,

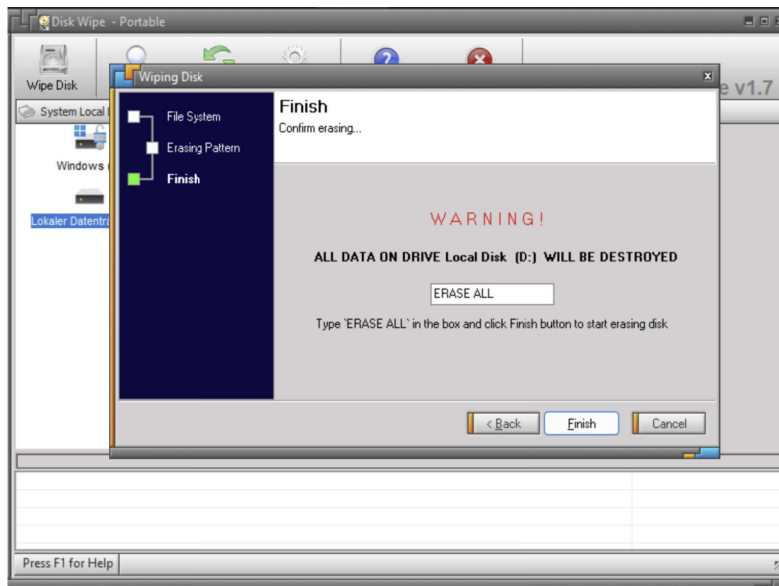


Abbildung 31: Bestätigung der Löschoperation durch Texteingabe "ERASE ALL"

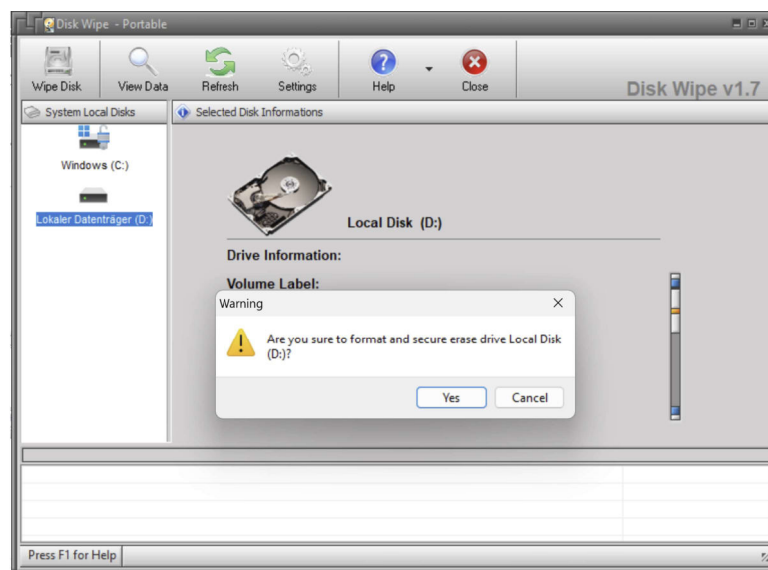


Abbildung 32: Abermalige Bestätigung zum Beginnen des Löschvorgangs

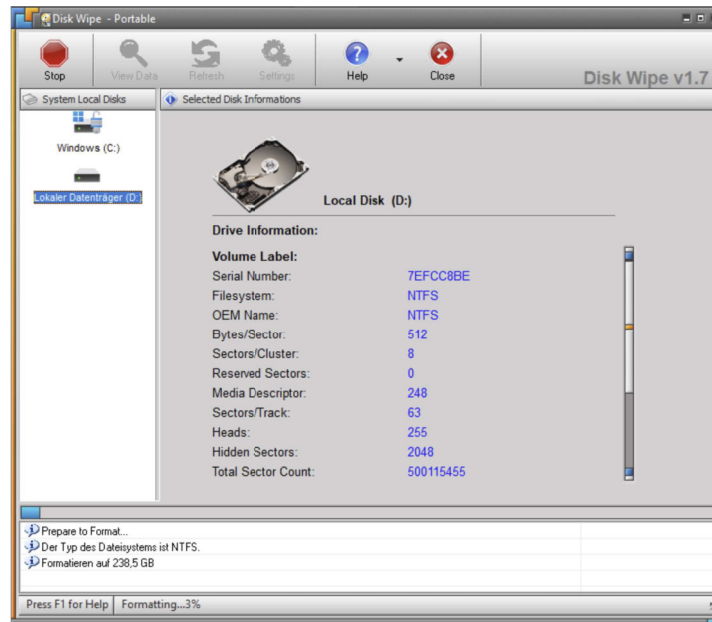


Abbildung 33: Der Löschvorgang beginnt mit der Formatierung

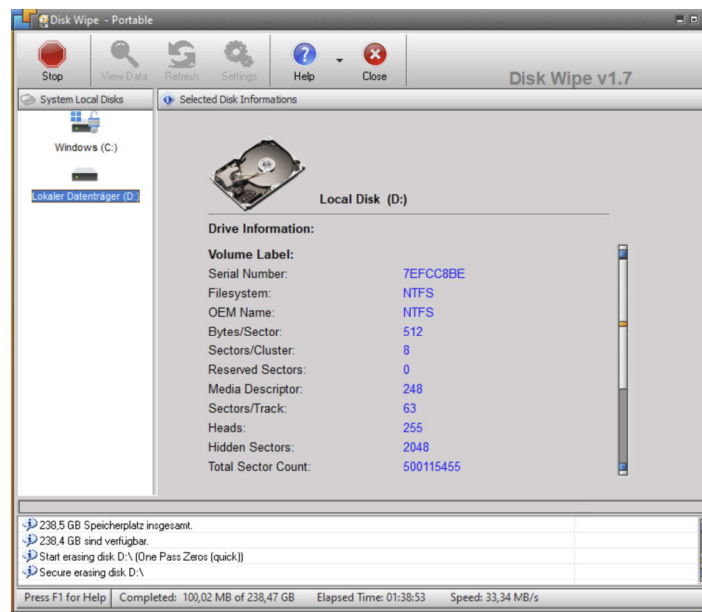


Abbildung 34: Abschluss der Low-Level Formatierung nach 1h, 38min

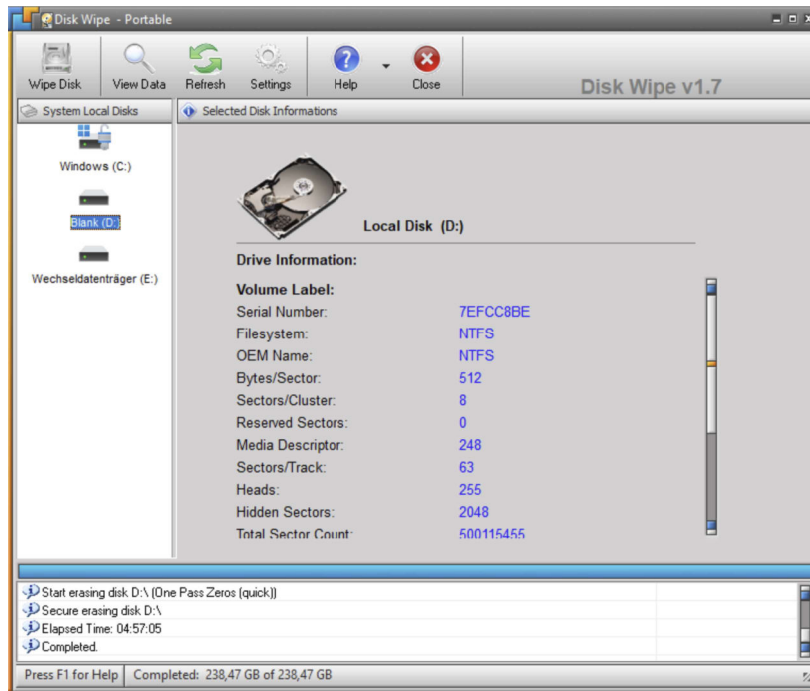


Abbildung 35: Abschluss der Löschoption nach 4h, 57 min

Das Speichermedium ist ein USB-Laufwerk "SSK 256GB USB Stick" mit hoher Lese- und Schreibrate (bis zu 550MB/s lesen, bis zu 500MB/s schreiben). Ein ausführlicher Leistungstest kann hier abgerufen werden: https://ssd-tester.de/ssk_sd301_256gb.html

Dennoch ist bei dieser Speichergröße der Fortschritt sehr langsam, somit dauert der Löschkvorgang knapp 5h für den Datenträger bei nur einem Durchlauf!

7.2 Image des USB-Stick erstellen

Für die Erstellung eines forensischen Datenträgerabbilds wird ein Software-Write-Blocker eingesetzt, um keine Daten zu überschreiben oder sonstige versehentliche Schreiboperationen am Datenträger durchzuführen (siehe Abbildung 36). Der Test des Software-Write-Blockers wird durchgeführt, um die Methode zu verifizieren und ist in

Abbildung 37 dargestellt.

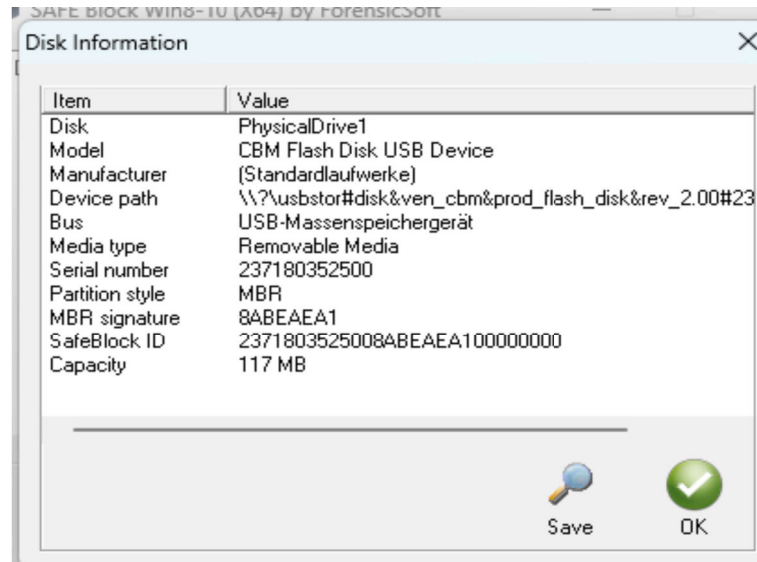


Abbildung 36: Informationen zum externen Laufwerk von SAFE Block

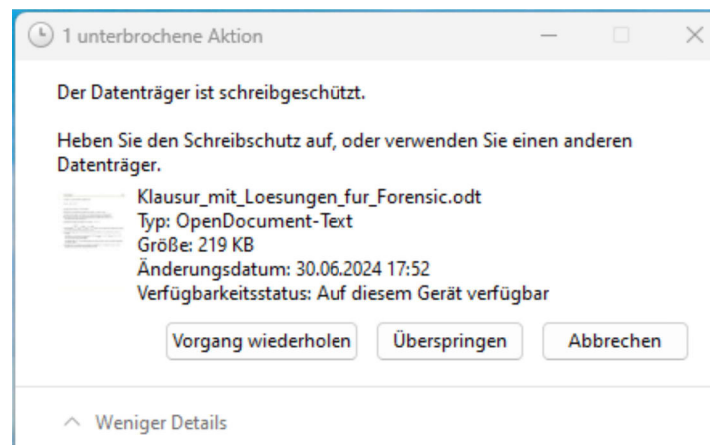


Abbildung 37: Durch Software-Write-Blocker SAFE Block werden die USB Stick Schreibrechte geblockt

Das Datenträgerabbild vom Typ EWS des USB-Stick wird mit AccessData FTK Imager erstellt, siehe Abbildung 38.

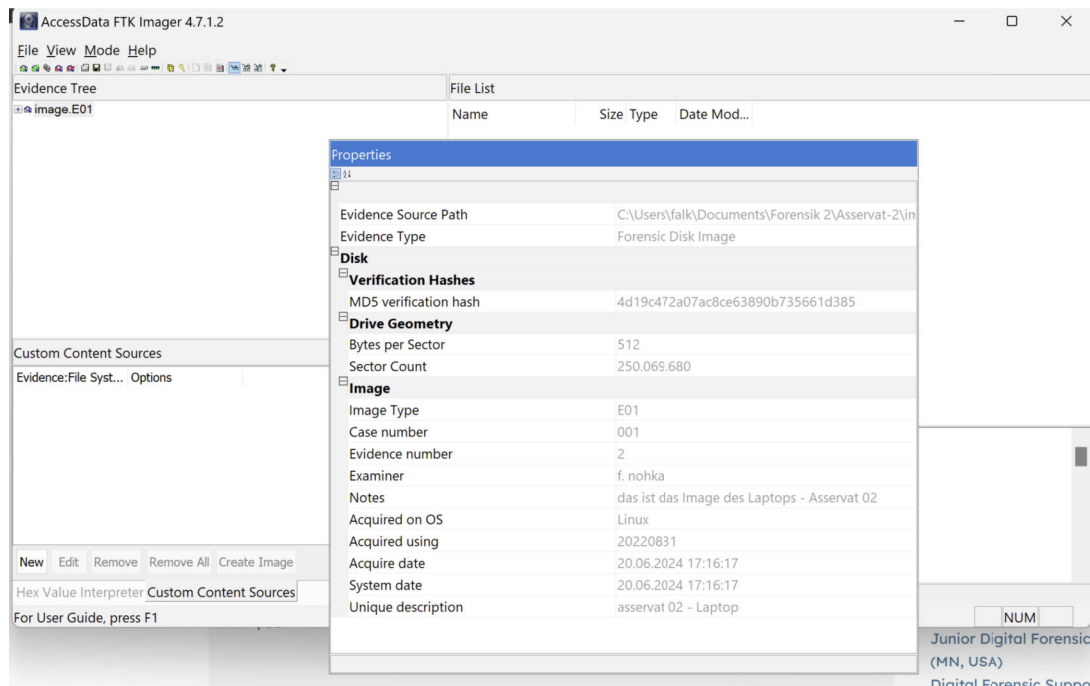


Abbildung 38: Erstellen des Images des USB-Stick

7.3 Image des Laptop erstellen

Zum Erstellen eines forensischen Datenträgerabbilds der Festplatte von Asservat "Laptop" wird das Werkzeug OSFClone von PassMark Software genutzt (siehe <https://www.osforensics.com/tools/create-disk-images.html>)

Dazu wird ein USB-Stick als Boot-Stick erstellt, der das Werkzeug enthält. Der Boot-Stick wird in den Laptop eingesteckt und per BIOS-Auswahl als Startmedium ausgewählt.

Dies funktioniert in diesem Fall, da es keine Sicherung des Laptops gegenüber externen Bootmedien gibt und auch das BIOS nicht passwortgesichert ist.

Das Image selbst wird von dem Werkzeug als EWF-Format (https://forensics.wiki/encase_image_file_format/) in mehreren Dateien von 1,4 GB Größe erstellt. Der Vorgang ist in Abbildung 39 bis Abbildung 42 dargestellt.

```

=====
PassMark(B) Software
USFClone v1.4.1000 - OSForensics 'dd' & 'AFF' Utility

Licensing:
USFClone contains the following components:
Fest which is licensed under GPL.
USFClone software which is licensed under GPL v2.0.
AFF and AFFLIB - Copyright (c) 2005, 2006, 2007, 2008 Simon L.
Garfinkel and Basis Technology Corp. All rights reserved.

PassMark Software remains the copyright holder of this script.

This script is the confidential and proprietary information of
PassMark Software ('Confidential Information'). You shall not
disclose such Confidential Information and shall use it only in
accordance with the terms of the license agreement you entered into
with PassMark Software.

This script will help you clone hard drives connected to the system.
WARNING 'dd' is a powerful command line tool, misuse of the program
can cause DATA TO BE LOST!

PassMark(B) Software provides no warranty for this utility.
Use at your own risk.

Note: If you need more advance control of 'dd' or 'aimage', you can run
'dd' or 'dc3dd' or 'aimage' from the linux command line.

=====
Today's Date: Jun 20, 2024 15:03:56

Please select an option:
1. Clone complete drive
2. Image complete drive
3. Image specified partition
4. Write image to drive
5. Compute checksum of drive/partition
6. Show additional drive details( Current value: No )
7. Select keyboard layout( Currently US Layout )
8. Shutdown PC
9. Exit
> 2_

```

Abbildung 39: Erstellung eines Abbilds (Image) der gesamten Festplatte

```

=====
USFClone Imaging Format =====

dd (via dc3dd) is a common Unix program whose primary purpose is the low-level
copying and conversion of raw data. dd can be used to copy regions of raw device
files, e.g. backing up a partition or whole drives. The size of the image file
created (before compression) will be the same size as the source.

AFF is an open and extensible file format to store disk images and
associated metadata. AFF supports the definition of arbitrary metadata by storing all
data as name and value pairs, called segments. The current AFF format supported is a
single file that contains segments with drive data and metadata. Its contents can be
compressed, but it can still be quite large on modern hard disks.

EWF (via libewf) (Expert Witness Compression Format) or better known as the
Incense image file format. EWF contains a physical bitstream of an acquired disk. It
is prefixed with a Case Info header and interleaved with checksums for every block of
64 x 512 byte sectors. The footer contains a hash for the entire bitstream. Also
contained in the header are the various metadata related to the acquisition.

Please select format you wish to use:
1. dd (via dc3dd)
2. AFF (requires atleast 256MB of RAM)
3. EWF (requires atleast 256MB of RAM)
> 2_

```

Abbildung 40: Es wird das EWF Format genutzt (Option 3)

```

Start to acquire at offset (0 <= value <= 128835676160) [0]:
The number of bytes to acquire (0 <= value <= 128835676160) [128835676160]:
Evidence segment file size in bytes (1.0 MiB <= value <= 7.9 EiB) [1.4 GiB]:
The number of bytes per sector (1 <= value <= 4294967295) [512]:
The number of sectors to read at once (16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, 32768) [64]:
The number of sectors to be used as error granularity (1 <= value <= 64) [64]:
The number of retries when a read error occurs (0 <= value <= 255) [2]:
Wipe sectors on read error (mimic EnCase like behavior) (yes, no) [no]:

The following acquire parameters were provided:
Image path and filename: /mnt/tmp/Imagr.E01
Case number: 991
Description: asseruat 02 - Laptop
Evidence number: 2
Examiner name: f. mhka
Notes: das ist das Image des Laptops - Asseruat 02
Media type: Fixed disk
Is physical: yes
EMF file format: EnCase 6 (.E01)
Compression method: deflate
Compression level: fast
Acquire start offset: 0
Number of bytes to acquire: 119 GiB (128835676160 bytes)
Evidence segment file size: 1.4 GiB (1572864000 bytes)
Bytes per sector: 512
Block size: 64 sectors
Error granularity: 64 sectors
Retries on read error: 2
Zero sectors on read error: no

Continue acquire with these values (yes, no) [yes]:
Acquire started at: Jan 29, 2024 17:15:17
This could take a while.

Status: at 0.2%
  acquired 301 MiB (315478432 bytes) of total 119 GiB (128835676160 bytes)
  completion in 26 minute(s) and 55 second(s) with 75 MiB/s (79834368 bytes/second)

Status: at 0.3%
  acquired 420 MiB (449159776 bytes) of total 119 GiB (128835676160 bytes)
  completion in 37 minute(s) and 52 second(s) with 53 MiB/s (56155936 bytes/second)

Status: at 0.4%
  acquired 570 MiB (597804928 bytes) of total 119 GiB (128835676160 bytes)
  completion in 42 minute(s) and 30 second(s) with 47 MiB/s (49819328 bytes/second)

```

Abbildung 41: Nach der Auswahl der Parameter zur Imageerstellung beginnt der Prozess

```

Jan 29, 2024 17:18:22 : STATUS: Imaging finished.
Jan 29, 2024 17:18:22 : INFO: Imaging done!
Jan 29, 2024 17:18:22 : INFO: Start time: Jan 29, 2024 17:15:12
Jan 29, 2024 17:18:22 : INFO: End time: Jan 29, 2024 17:18:22
Jan 29, 2024 17:18:22 : STATUS: Unmounting /mnt/tmp,...

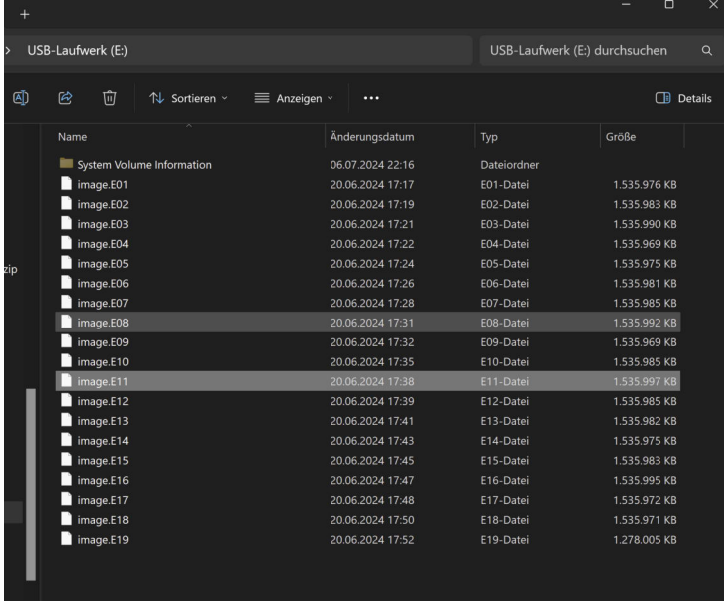
```

Abbildung 42: Image-Erstellung abgeschlossen

Da die Systemzeit des Laptop in der Vorbereitung auf den Zeitpunkt nach der Beschlagnahme gesetzt wurde, werden die folgenden Zeitstempel für die Operation ausgegeben:

- Start: 20.06.2024 19:11:32MESZ, bzw. 17:11:32UTC
- Ende 20.06.2024 19:52:22MESZ, bzw. 17:52:22UTC

Durch Nutzung des EWF Formats (https://forensics.wiki/encase_image_file_format/) für das Image wird ein Image erzeugt, welches in 19 Elemente á 1,4 GB Größe unterteilt ist (siehe Abbildung 43).



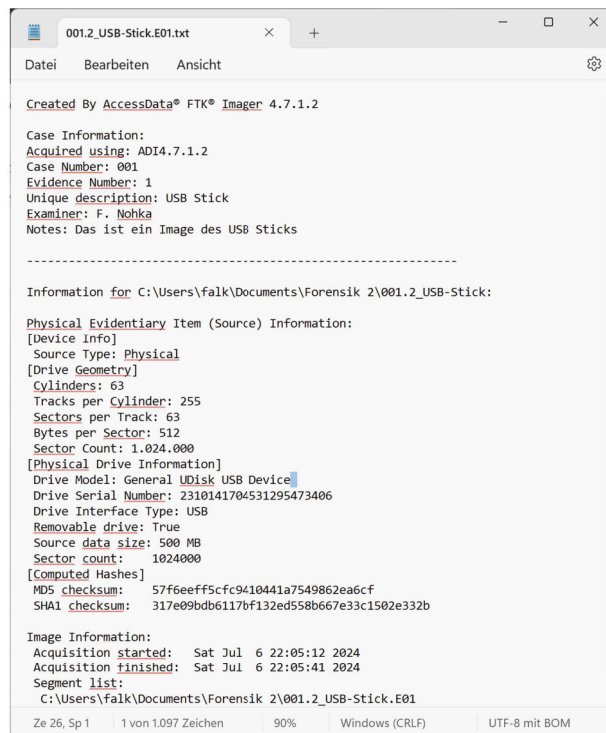
Name	Änderungsdatum	Typ	Größe
System Volume Information	06.07.2024 22:16	Dateiordner	
image.E01	20.06.2024 17:17	E01-Datei	1.535.976 KB
image.E02	20.06.2024 17:19	E02-Datei	1.535.983 KB
image.E03	20.06.2024 17:21	E03-Datei	1.535.990 KB
image.E04	20.06.2024 17:22	E04-Datei	1.535.969 KB
image.E05	20.06.2024 17:24	E05-Datei	1.535.975 KB
image.E06	20.06.2024 17:26	E06-Datei	1.535.981 KB
image.E07	20.06.2024 17:28	E07-Datei	1.535.985 KB
image.E08	20.06.2024 17:31	E08-Datei	1.535.992 KB
image.E09	20.06.2024 17:32	E09-Datei	1.535.969 KB
image.E10	20.06.2024 17:35	E10-Datei	1.535.985 KB
image.E11	20.06.2024 17:38	E11-Datei	1.535.997 KB
image.E12	20.06.2024 17:39	E12-Datei	1.535.985 KB
image.E13	20.06.2024 17:41	E13-Datei	1.535.982 KB
image.E14	20.06.2024 17:43	E14-Datei	1.535.975 KB
image.E15	20.06.2024 17:45	E15-Datei	1.535.983 KB
image.E16	20.06.2024 17:47	E16-Datei	1.535.995 KB
image.E17	20.06.2024 17:48	E17-Datei	1.535.972 KB
image.E18	20.06.2024 17:50	E18-Datei	1.535.971 KB
image.E19	20.06.2024 17:52	E19-Datei	1.278.005 KB

Abbildung 43: Das Datenträgerabbild in 19 Dateien

8 Dokumentation der Details der forensischen Analyse

8.1 Analyse der Images

Mit der Erstellung des Images vom USB-Stick (Asservat 01) in FTK Imager werden zusätzlich wichtige Informationen zum Datenträger bereitgestellt. (siehe Abbildung 44) Diese werden zur Analyse herangezogen und im Gutachten festgehalten.



```
001.2_USB-Stick.E01.txt
Datei Bearbeiten Ansicht
Created By AccessData® FTK® Imager 4.7.1.2
Case Information:
Acquired using: ADI4.7.1.2
Case Number: 001
Evidence Number: 1
Unique description: USB Stick
Examiner: F. Nohka
Notes: Das ist ein Image des USB Sticks

-----
Information for C:\Users\faik\Documents\Forensik 2\001.2_USB-Stick:

Physical Evidentiary Item (Source) Information:
[Device Info]
Source Type: Physical
[Drive Geometry]
Cylinders: 63
Tracks per Cylinder: 255
Sectors per Track: 63
Bytes per Sector: 512
Sector Count: 1.024.000
[Physical Drive Information]
Drive Model: General UDisk USB Device
Drive Serial Number: 2310141704531295473406
Drive Interface Type: USB
Removable drive: True
Source data size: 500 MB
Sector count: 1024000
[Computed Hashes]
MD5 checksum: 57F6eeff5cfc9410441a7549862ea6cf
SHA1 checksum: 317e09bdb6117bf132ed558b667e33c1502e332b

Image Information:
Acquisition started: Sat Jul 6 22:05:12 2024
Acquisition finished: Sat Jul 6 22:05:41 2024
Segment list:
C:\Users\faik\Documents\Forensik 2\001.2_USB-Stick.E01
Ze 26, Sp 1 | 1 von 1.097 Zeichen | 90% | Windows (CRLF) | UTF-8 mit BOM
```

Abbildung 44: Metadaten zum Image des USB-Sticks

Als Analysewerkzeug kommt Magnet AXIOM zum Einsatz. Hier wird zunächst ein Fall mithilfe von AXIOM Process erstellt. Anschließend werden die Datenträgerabbilder von Asservat 01 und Asservat 02 als Beweismittelquelle in den Fall aufgenommen und mit einem weiteren Baustein des Analysewerkzeugs, AXIOM Examine, indiziert. Das

Indizieren der Beweismittelquellen dauert mehrere Stunden.

Die Operationen, die auf den Images ausgeführt werden (Parsing und Carving) fördern auf dem Beweismittel Asservat 01 (USB-Stick) eine Ordnerstruktur auf dem Laufwerk zutage (siehe Abbildung 45). Es befindet sich ein Datei "Abprüfung_Mathe.docx" auf dem Laufwerk und eine gelöschte Datei mit identischem Namen.

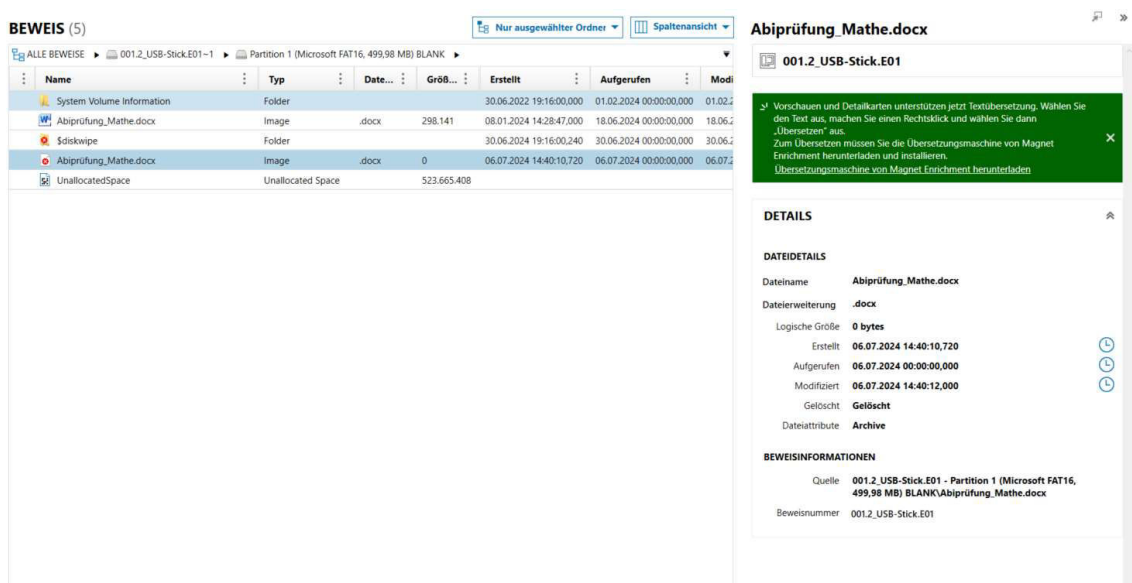


Abbildung 45: Ergebnis der Analyse des Images vom USB-Stick

Weiterhin wird mit AXIOM Examine nach Beziehungen zwischen den Artefakten gesucht. Dieser Vorgang wird auf den gefundenen Artefakten durchgeführt und dauert mehrere Minuten (>10 min). Auch die Erstellung einer Timeline ist ein Prozess, den der Nutzer anstoßen kann und der die gefundenen Artefakte in einer zeitlichen Abfolge darstellbar macht. Dieser Vorgang dauert ebenfalls mehrere Minuten (> 5 min).

Insgesamt ist die Menge an gefundenen Artefakten im Tatzeitraum mit 26.134 Artefakte, sehr hoch (siehe Abbildung 46), daher muss der Benutzer diese weiter filtern, z.B. mit Stichwörtern, nach denen gesucht wird. Es wird nach "abi", „abprüfung“ und "mathe" gesucht. Die Ergebnisse werden manuell durchgesehen und relevante Artefakte werden markiert. Im vorliegenden Fall erfolgt die Markierung entweder als

“Beweis” (rot) oder “von Interesse” (gelb). “Von Interesse” bedeutet in diesem Fall, dass das Artefakt möglicherweise mit dem Fall in Verbindung stehende Informationen enthält. Als “Beweis” kommen Artefakte in Frage, die eindeutige Antworten auf die im Auftrag aufgeworfenen Fragen liefern, siehe Kapitel 5.2.

Als nächstes werden Artefakte in gefundenen Dokumenten und Mediendaten durchsucht und entsprechend markiert. Auch dies passiert manuell. Siehe hierzu Abbildungen 46 bis 48.

Abbild	Dateiname	Datei...	Datum/Zeit der...	Letzter Zugriff...	Zu
	splashscreen.scale-100.png	.png	07.12.2019 10:10:30,293	18.06.2024 20:35:39,292	07.1
	TaskbarIcon.scale-100_contrast-standard.png	.png	25.01.2017 10:45:19,575	18.06.2024 15:41:28,694	25.0
	Square150x150Logo.scale-100.png	.png	18.02.2024 16:18:34,082	18.06.2024 15:41:29,179	18.0
	OneNoteSmallTile.scale-100.png	.png	24.06.2019 08:40:22,867	18.06.2024 15:41:29,507	24.0
	PhotosLogoExtensions.targetsize-48.png	.png	07.04.2020 08:43:03,133	18.06.2024 15:51:48,611	07.0
	PhotosLogoExtensions.targetsize-256.png	.png	07.04.2020 08:43:03,118	18.06.2024 15:51:59,623	07.0
	FileExtension.targetsize-48.png	.png	23.06.2020 08:45:19,701	19.06.2024 07:40:42,299	23.0
	Flex für Kumpels.JPG	JPG	19.06.2024 07:42:15,588	19.06.2024 07:42:15,588	19.0
	Flex für Kumpels.JPG	JPG	19.06.2024 07:42:15,572	19.06.2024 07:42:15,588	19.0
	Schule außen.JPG	JPG	16.06.2024 16:32:06,000	19.06.2024 07:42:04,812	16.0
	Hier einsteigen.JPG	JPG	16.06.2024 16:32:06,000	19.06.2024 07:42:04,796	16.0
	Schule von oben (Plan).png	.png	16.06.2024 16:32:06,000	19.06.2024 07:42:04,812	16.0
	DefenderAppSplashScreen.scale-400.png	.png	07.12.2019 10:08:43,159	18.06.2024 15:41:40,909	07.1
	SettingsLogo.scale-100_contrast-standard.png	.png	25.01.2017 10:45:19,575	18.06.2024 15:41:28,710	25.0
	Hkk Mitgliedsbescheinigung S.1.jpg	.jpg	21.07.2020 08:55:05,522	18.06.2024 20:32:13,343	21.0
	Hochschulzeugnis S.1.jpg	.jpg	21.07.2020 08:42:38,648	18.06.2024 20:32:13,372	21.0
	img059 (2).jpg	.jpg	16.10.2020 13:12:42,191	18.06.2024 20:30:20,547	16.1

Abbildung 46: Mediendateien mit markierten Elementen, gefiltert nach Beweismittelquelle, Stichwörtern und Tatzeitraum

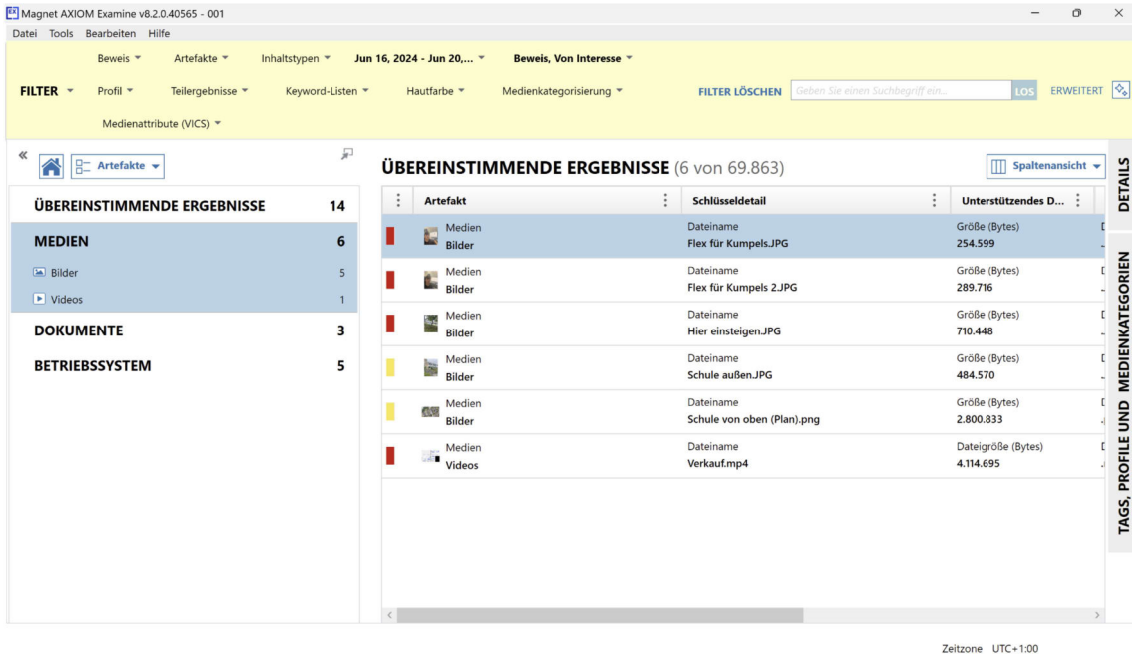


Abbildung 47: Darstellung der markierten Elemente an Mediendateien

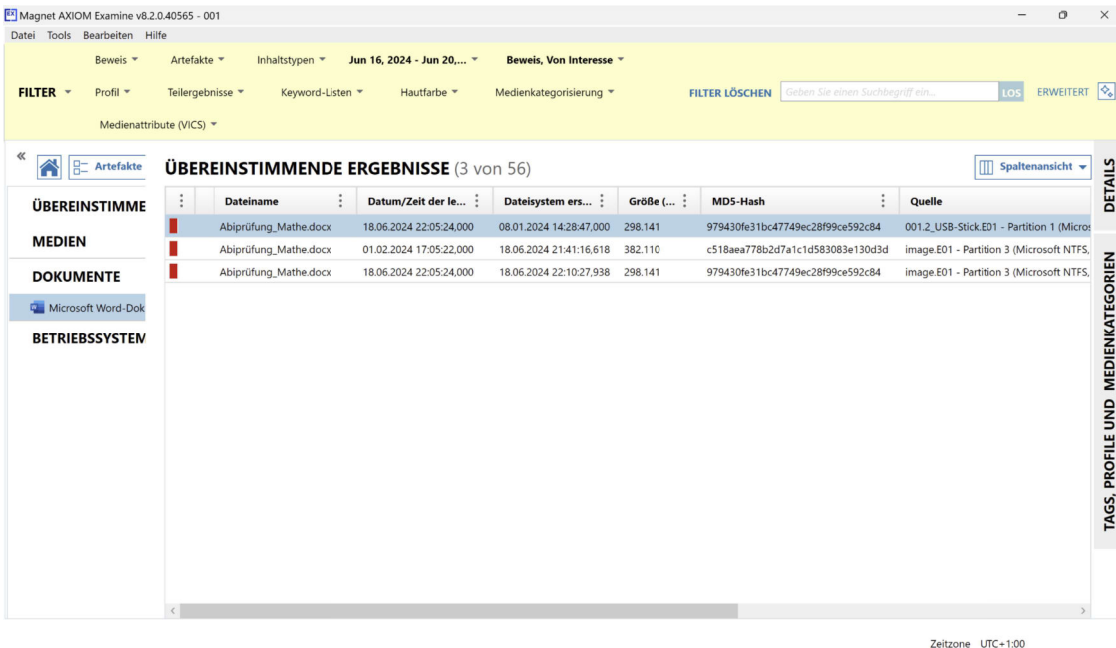


Abbildung 48: gefilterte und markierte Microsoft Word Dokumente von allen Beweismittelquellen

Die gefundenen Word-Dateien lassen sich nun per Kontextmenü auf Beziehungen hin untersuchen. AXIOM Examine erstellt einen Grafen, der die Beziehung widerspiegelt,

z.B. den Hashwert einer Datei, siehe Abbildung 49. In diesem Fall sind die namensgleichen Dateien auf Asservat 01 (001.2_USB-Stick) und Asservat 02 (image.E01) identisch, was über den identischen Hash-Wert bestätigt wird. Mithilfe dieser Funktion lässt sich schnell darstellen und erkennen, ob Verbindungen zwischen verschiedenen Dateien und auch zwischen verschiedenen Beweismitteln bestehen.

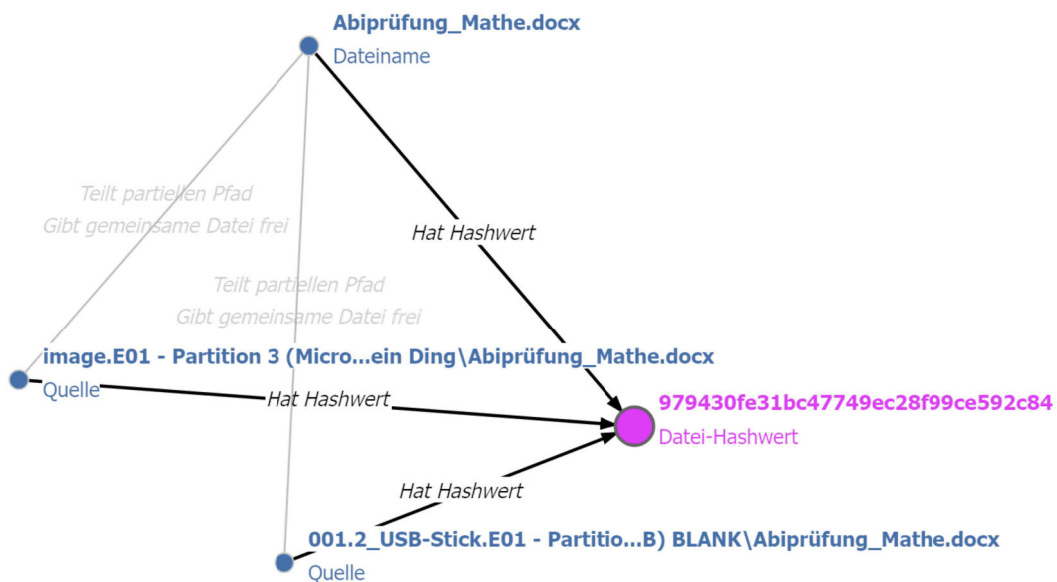


Abbildung 49: Darstellung von Beziehungen zwischen zwei Artefakten

Als nächstes wird die Liste an gefundenen Ereignissen des Betriebssystems durchsucht. Hier sind von besonderem Interesse die Ereignisse im Zusammenhang mit USB-Speichermedien und Anwendungen, welche Dateien von Microsoft Office Produkten, insbesondere Microsoft Word, verarbeiten können.

Auch hier findet wieder eine Bewertung der Ereignisse durch den Benutzer statt (Markierung als "Beweis" oder "von Interesse"), siehe Abbildung 50.

The screenshot shows a forensic analysis interface. On the left, a sidebar lists various artifacts, with 'Windows-Ereignisprotokolle – Speichergeräteereignisse' selected. The main area displays a table titled 'ÜBEREINSTIMMENDE ERGEBNISSE (18 von 18)'. The table has columns for 'Ereignis-ID', 'Datum/Zeit der...', 'Ereignis-ID', 'Ereignisbeschreibung – Zusammenfassung', 'Aktion', and 'Gesamt'. The table lists 18 events related to storage device connections and disconnections. The event with ID 1006 and timestamp 18.06.2024 22:12:21.569 is highlighted in blue.

Ereignis-ID	Datum/Zeit der...	Ereignis-ID	Ereignisbeschreibung – Zusammenfassung	Aktion	Gesamt
1006	18.06.2024 17:02:09.056	5	Storage Device Kingston DataTraveler G2 Connected.	Connected	401080
1006	18.06.2024 15:51:15.003	3	Storage Device Kingston DataTraveler G2 Connected.	Connected	401080
1006	18.06.2024 17:02:24.240	6	Storage Device Kingston DataTraveler G2 Disconnec...	Disconnected	0
1006	18.06.2024 16:08:43.320	4	Storage Device Kingston DataTraveler G2 Disconnec...	Disconnected	0
1006	18.06.2024 21:40:23.758	7	Storage Device General UDisk Connected.	Connected	524288
1006	18.06.2024 21:41:27.420	8	Storage Device Kingston DataTraveler G2 Connected.	Connected	401080
1006	18.06.2024 22:11:13.536	9	Storage Device Kingston DataTraveler G2 Disconnec...	Disconnected	0
1006	18.06.2024 22:12:21.569	10	Storage Device General UDisk Connected.	Connected	524288
1006	18.06.2024 22:13:12.477	11	Storage Device Kingston DataTraveler G2 Connected.	Connected	401080
1006	18.06.2024 15:51:15.003	3	Storage Device Kingston DataTraveler G2 Connected.	Connected	401080
1006	18.06.2024 16:08:43.320	4	Storage Device Kingston DataTraveler G2 Disconnec...	Disconnected	0
1006	18.06.2024 17:02:09.056	5	Storage Device Kingston DataTraveler G2 Connected.	Connected	401080
1006	18.06.2024 17:02:24.240	6	Storage Device Kingston DataTraveler G2 Disconnec...	Disconnected	0
1006	18.06.2024 21:40:23.758	7	Storage Device General UDisk Connected.	Connected	524288
1006	18.06.2024 21:41:27.420	8	Storage Device Kingston DataTraveler G2 Connected.	Connected	401080
1006	18.06.2024 22:11:13.536	9	Storage Device Kingston DataTraveler G2 Disconnec...	Disconnected	0
1006	18.06.2024 22:12:21.569	10	Storage Device General UDisk Connected.	Connected	524288

Abbildung 50: Markierte Ereignisse des Betriebssystems zu Speichergeräten

Nachdem alle relevanten Artefakte markiert wurde lässt sich durch Filtern der in der Zeitachse aufgeführten Elemente ein guter zeitlicher Überblick über Aktivitäten im Zusammenhang mit den markierten Artefakten gewinnen, siehe Abbildung 51. Dies hilft beim Aufstellen einer Timeline zur Beantwortung der Fragen im Gutachten, siehe Kapitel 5.2.

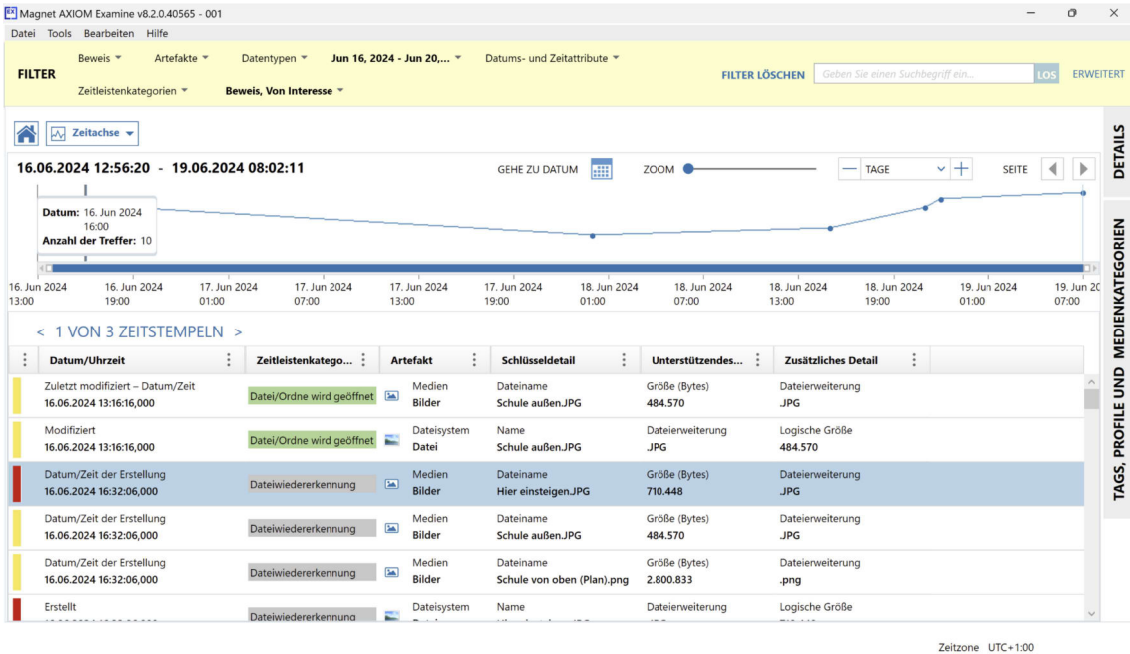


Abbildung 51: Zeitachse mit gefilterten Ereignissen

8.2 Analyse Word Dateien

Zur Analyse der Word Dateien werden einerseits die Ergebnisse der Analyse der Dateieigenschaften genutzt, wie beispielsweise Zeitstempel und berechnete Hashwerte. Darüber hinaus lassen sich mit AXIOM die Dateien inhaltlich nur im Überblick erfassen. Eine Lösung bietet die Anwendung Microsoft Office, bzw. Microsoft Word selbst mit der eingebauten Funktion, Dateien vergleichen zu können. Dadurch werden Unterschiede sichtbar gemacht, was es dem Forensiker erlaubt, in Verbindung mit den zuvor genannten Erkenntnissen der Dateianalyse, Änderungen im zeitlichen Verlauf darzustellen. Somit wird sichtbar, in welchem Maße sich die relevanten Word-Dateien auf dem Laptop bzw. dem USB-Stick unterscheiden, siehe hierzu auch Kapitel 5.6.3 und Abbildungen 23 und 24.

9 Anhang

A Ergänzter Fachbegriff Adware im IT-Forensik-Wiki

Definition

Der Begriff Adware leitet sich von dem englischen Wort Advertisement ab und bedeutet so viel Werbung oder Reklamation.¹ Bei Adware handelt es sich um eine Variante von Schadsoftware, welche vermeintlich keine echte Schadfunktion ausübt. Dennoch wird üblicherweise, ähnlich wie bei Spyware, das Nutzerverhalten an den Hersteller übermittelt und stellt somit eine Verletzung der Privatsphäre der Nutzer dar. Durch den Einsatz von Adware erhoffen sich die Hersteller eine zusätzliche Einnahmequelle durch Werbeeinnahmen. In der Regel handelt es sich bei der Adware um kleine Programme, die Demo-Versionen oder Werbung von Softwareprodukten enthalten.²

Anzeichen für Adware auf dem Gerät

Um feststellen zu können, ob das eigene Endgerät von Adware befallen ist, können bestimmte Symptome beobachtet werden. Zum einen hat Adware den Effekt, dass Endgeräte spürbar an Leistung einbüßen, insbesondere bei der Nutzung des Webbrowsers. Des Weiteren sollte darauf geachtet werden, ob der Webbrowser automatisch beim öffnen, unbekannte Webseiten aufruft. Ein weiteres Indiz für einen Befall ist, dass unautorisiert die Startseite des Webbrowsers angepasst und nach entsprechender Korrektur durch den Nutzer automatisch eine Korrektur der Änderung vorgenommen wurde. Werden dem hinzu neue Einträge im Lesezeichen- oder Favoriten-Menü entdeckt, welche nicht durch den Nutzer gespeichert wurden, kann ebenfalls von Adware ausgegangen werden. Da mit Adware befallene Geräte oftmals eigenständig Verbindungen zum Internet aufbauen, kann bei der Beobachtung der

Firewall festgestellt werden, dass betroffene Programme permanent eine Verbindung zum Internet versuchen aufzubauen. Im Rahmen der IT-forensischen Analyse können diese Hinweise ebenfalls genutzt werden, um den Vorfall aufzuklären.²

Einfallstor für Adware

Durch das unüberlegte Herunterladen von bspw. beliebiger Freeware oder Shareware, gehen Nutzer ein hohes Risiko für einen Befall des eigenen Gerätes ein. Sobald die Software aus meist fragwürdigen Quellen auf das Gerät des Opfers heruntergeladen und die Installation ausgeführt wurde, kann das Installationsprogramm heimlich ohne Kenntnis des Nutzers die Adware auf dem Gerät mitinstallieren. Im Rahmen der IT-forensischen Analyse ist dementsprechend auf Installationsdateien aus fragwürdigen Quellen zu achten und ggf. mit der Analyse der Browser-Historie zu verknüpfen.³

Adware-Tracking-Cookies

Auch im Bereich der Cookies gibt es Adware, diese werden Adware-Tracking-Cookies genannt. Da Cookies unter anderem die persönlichen Daten der Nutzer speichern, können diese Daten durch den Einsatz von Adware-Tracking-Cookies zweckentfremdet werden, wobei auch der Verkauf der persönlichen Daten an dubiose Akteure erfolgen kann. Im Rahmen der IT-forensischen Analyse können diese Cookies als digitale Artefakte gesichert werden und zur Aufklärung dubioser Machenschaften der Anbieter dienen.³

Beispiel "SimBad"

Die Android-Malware SimBad infizierte ca. 150 Million Smartphones und machte über die Werbe-SDK zahlreiche Anwendungen von Entwicklern zu Adware. Von diesem

Angriff waren 210 Android-Apps im Google Play Store betroffen. Da die Schadsoftware nach einer Analyse des israelischen Sicherheitsanbieters Check Point innerhalb eines RXDrioder (Advertising-Kit-Entwickler) ,versteckt war wussten die Entwickler der betroffenen Apps vermutlich nicht, dass diese Opfer eines Angriffs wurden.

Das Advertising-Kit war ursprünglich dafür gedacht, das Einblenden von Werbung innerhalb der Apps zu steuern. Dieses wurde jedoch von den Angreifern so manipuliert, dass Schadcode in die Apps eingespielt werden konnte. Schlussendlich war es hierdurch möglich, dass die Angreifer eigene Werbeanzeigen in die Apps einschleusen konnten, wodurch diese die Werbeeinnahmen erhalten haben. Im Rahmen des Angriffes war es den Angreifern des Weiteren möglich, im Online-Browser des Smartphones Anzeigen zu schalten und fremde Apps teilweise ohne Kenntnis der Nutzer auf dem Smartphone zu installieren.⁴

Schutzmaßnahmen (Best Practices)

Um eine bestmögliche Prävention von Angriffen mit Adware zu gewährleisten, sollten im Unternehmens- und Privatumfeld u.a. folgende Best Practices beachtet werden.

- Software auf dem neuesten Stand halten (inkl. Sicherheitsupdates)
- Wachsam bleiben und auf Unstimmigkeiten achten
- Legale Quellen nutzen (z.B. keine Crack Files)
- Bei der Installation alle Kontrollkästchen und Bedingungen beachten
- Informieren und Bewertungen lesen
- Nicht zu überstürzt handeln
- Kontoauszüge und Abrechnungen im Auge behalten
- Antivirensoftware nutzen⁵

Quellen

1. Kebschull, Udo. Computer Hacking: eine Einführung zur Verbesserung der Computersicherheit in komplexen IT-Infrastrukturen. Springer, 2023, S.39
2. <https://www.bsi.bund.de/DE/Themen/Verbraucherinnen-und-Verbraucher/Cyber-Sicherheitslage/Methoden-der-Cyber-Kriminalitaet/Schadprogramme/Adware-und-Spyware/adware-und-spyware.html>)
3. <https://www.crowdstrike.de/cybersecurity-101/adware/>
4. <https://www.kaspersky.de/resource-center/threats/adware>)
5. <https://www.zdnet.de/88356313/android-malware-simbad-infiziert-bis-zu-150-millionen-smartphones/>)

B Forensischer Untersuchungsbericht aus Magnet AXIOM

FORENSISCHER UNTERSUCHUNGSBERICHT

FALLNUMMER 001

Fall erstellt Sonntag, 7. Juli 2024
Bericht erstellt Donnerstag, 11. Juli 2024

FALLÜBERBLICK

FALLBEARBEITUNGSDetails

SCAN 4

Scan-Datum Montag, 8. Juli 2024 19:44:07

SCAN 3

Scan-Datum Montag, 8. Juli 2024 17:18:17

SCAN 2

Scan-Datum Sonntag, 7. Juli 2024 22:25:54

SCAN 1

Scan-Datum Sonntag, 7. Juli 2024 17:38:53

BEWEISÜBERBLICK

Beweiselemente 2

Kombinierte Ergebnisse 284.685

IMAGE.E01 (284.656)

Software zur Beweisverarbeitung AXIOM Process v8.2.0.40565

Beweisnummer image.E01

Speicherort image.E01

Plattform Computer

001.2_USB-STICK.E01 (29)

Software zur Beweisverarbeitung AXIOM Process v8.2.0.40565

Beweisnummer 001.2_USB-Stick.E01

Speicherort 001.2_USB-Stick.E01

Plattform Computer

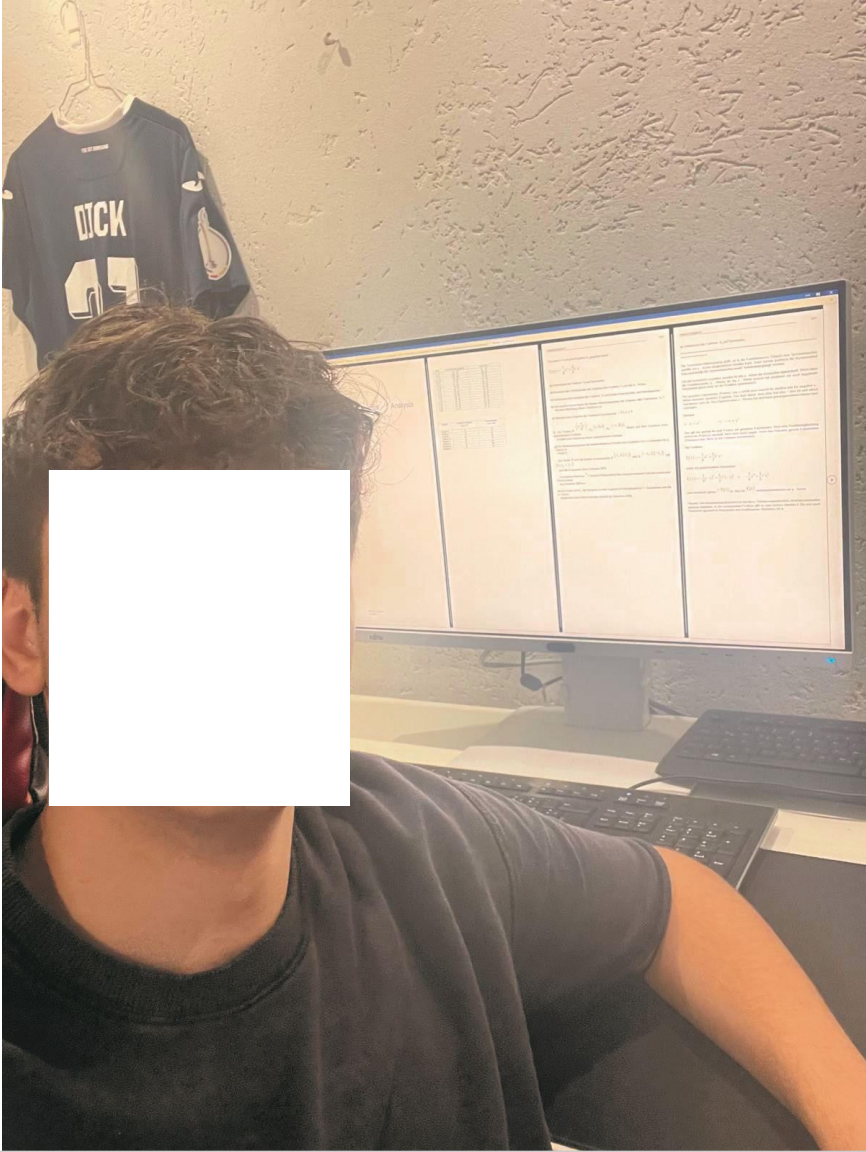
KEYWORD-ÜBEREINSTIMMUNGEN

Keyword	Matches
abi	165.358
mathe	5.529
abiprüfung	109

Bericht 1

Tags	Von Interesse
Identifikator	Julian
Spaltenname	User Name
Artefakt	User Accounts - Windows
Artefakt-ID	126749
Quelle	<ul style="list-style-type: none"> image.E01 - Partition 3 (Microsoft NTFS, 103,53 GB) Windows\Windows\System32\config\SAM image.E01 - Partition 3 (Microsoft NTFS, 103,53 GB) Windows\Windows\System32\config\SOFTWARE
Speicherort	<ul style="list-style-type: none"> Registry Key: SAM\Domains\Account\Users\000003E9 Registry Key: SAM\Domains\Builtin\Aliases\00000220 Registry Key: HKLM\Software\Microsoft\Windows NT\CurrentVersion\ProfileList\S-1-5-21-13442-53046-959782131-521238700-1001
Beweisnummer	<ul style="list-style-type: none"> image.E01
Objekt-ID	126761

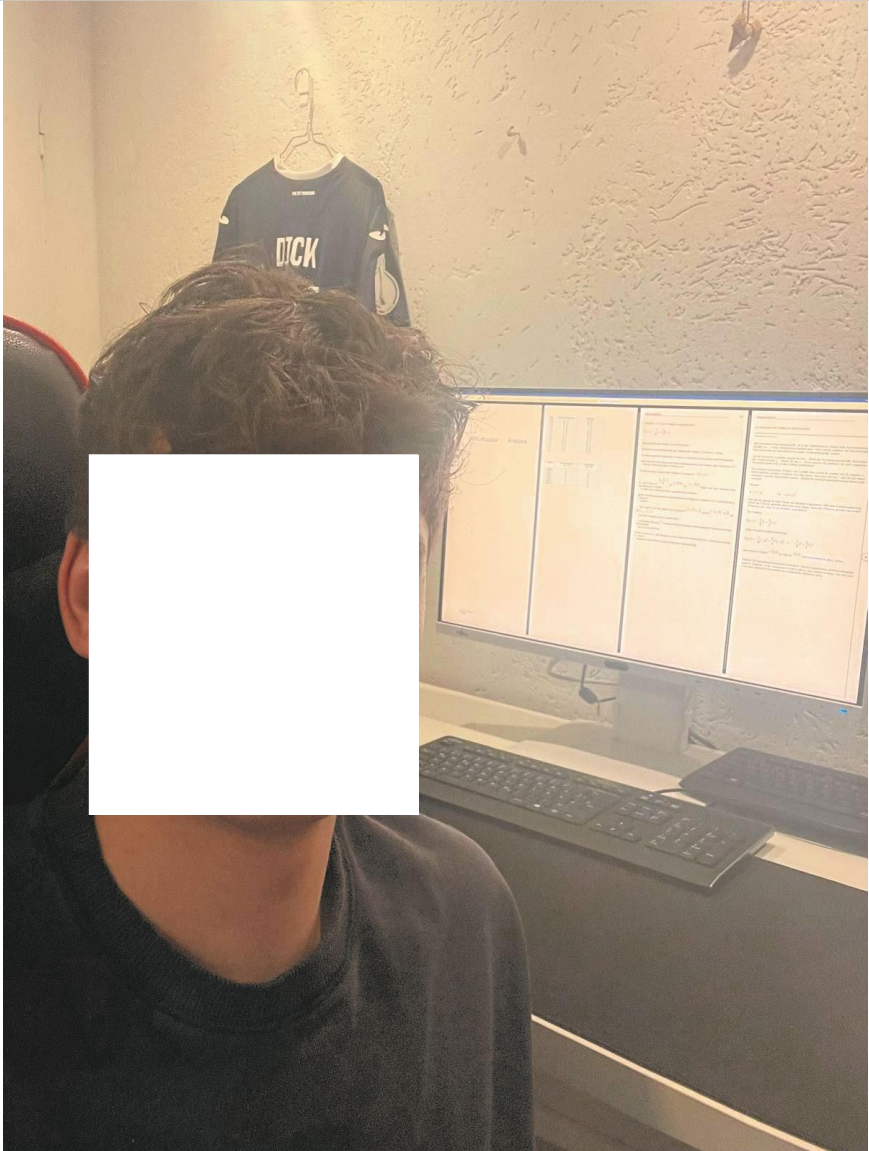
Bericht 1

Tags Abbild	Beweis
	
Dateiname	Flex für Kumpels.JPG
Dateierweiterung	.JPG
Datum/Zeit der Erstellung –	19.06.2024 07:42:15,588
UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	
Letzter Zugriff – Datum/Zeit –	19.06.2024 07:42:15,588
UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	
Zuletzt modifiziert –	19.06.2024 07:28:16,000
Datum/Zeit – UTC+01:00	
(dd.MM.yyyy)[DST]	
Größe (Bytes)	254599
Hautfarbenprozensatz	68.7
Originalbreite	1200
Originalhöhe	1599
Exif-Extrahierungsstatus	Complete
Datum/Zeit der Erstellung–	2024-07-03 16:46:27.000
Lokale Zeit (tt-mm-jjjj)	
Modifiziert – Datum/Zeit –	2024-07-03 16:46:27.000
Lokale Zeit	

Pictures

Exif-Daten	Extraction Result: Complete ImageWidth: 1200 ImageHeight: 1599 DateTimeOriginal: 07/03/2024 16:46:27 CreateDate: 07/03/2024 16:46:27 ModifyDate: 07/03/2024 16:46:27
MD5-Hash	d484e9e928a0265c7a2ac77039c3596f
SHA1-Hash	5d3247c4bb0456313a43448fd322b83fe42e530a
_rawData	[Binäre Daten]
Quelle	<ul style="list-style-type: none"> image.E01 - Partition 3 (Microsoft NTFS, 103,53 GB) Windows\Users\Julian\Desktop\Abi Plan\Flex für Kumpels.JPG
Speicherort	<ul style="list-style-type: none"> n/a
Beweisnummer	<ul style="list-style-type: none"> image.E01
Wiederherstellungsmethode	<ul style="list-style-type: none"> Geparst
Objekt-ID	170973

Bericht 2

Tags	Beweis
Abbild	
Dateiname	Flex für Kumpels 2.JPG
Dateierweiterung	.JPG
Datum/Zeit der Erstellung – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	19.06.2024 07:42:15,572
Letzter Zugriff – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	19.06.2024 07:42:15,588

Pictures

Zuletzt modifiziert – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	19.06.2024 07:28:16,000
Größe (Bytes)	289716
Hautfarbenprozensatz	67.0
Originalbreite	1200
Originalhöhe	1599
Exif-Extrahierungsstatus	Complete
Datum/Zeit der Erstellung– Lokale Zeit (tt-mm-jjjj)	2024-07-03 16:46:27.000
Modifiziert – Datum/Zeit – Lokale Zeit	2024-07-03 16:46:27.000
Exif-Daten	Extraction Result: Complete ImageWidth: 1200 ImageHeight: 1599 DateTimeOriginal: 07/03/2024 16:46:27 CreateDate: 07/03/2024 16:46:27 ModifyDate: 07/03/2024 16:46:27
MD5-Hash	231adfc1c25857230387f2bf168a4a93
SHA1-Hash	7468aca851690a54034cb63f4d9d441772be376f
_rawData	[Binäre Daten]
Quelle	<ul style="list-style-type: none"> image.E01 - Partition 3 (Microsoft NTFS, 103,53 GB) Windows\Users\Julian\Desktop\Abi Plan\Flex für Kumpels 2.JPG
Speicherort	<ul style="list-style-type: none"> n/a
Beweisnummer	<ul style="list-style-type: none"> image.E01
Wiederherstellungsmethode	<ul style="list-style-type: none"> Geparst
Objekt-ID	170978

Bericht 3

Tags	Beweis
------	--------

Abbild



Dateiname	Hier einsteigen.JPG
Dateierweiterung	.JPG
Datum/Zeit der Erstellung – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	16.06.2024 16:32:06,000
Letzter Zugriff – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	19.06.2024 07:42:04,796
Zuletzt modifiziert – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	16.06.2024 16:54:42,000
Größe (Bytes)	710448
Hautfarbenprozensatz	11.4
Originalbreite	1200
Originalhöhe	1600
Exif-Extrahierungsstatus	Complete
Datum/Zeit der Erstellung– Lokale Zeit (tt-mm-jjjj)	2024-07-03 13:16:17.000
Exif-Daten	Extraction Result: Complete ImageWidth: 1200 ImageHeight: 1600 DateTimeOriginal: 07/03/2024 13:16:17 CreateDate: 07/03/2024 13:16:17
MD5-Hash	123688e0e19ac8c2f97292bfa53e6fce
SHA1-Hash	8bfa3d4274c3f727abaca5f5d52048b5d895f4b1
_rawData	[Binäre Daten]

Pictures

Quelle	<ul style="list-style-type: none"> image.E01 - Partition 3 (Microsoft NTFS, 103,53 GB) Windows\Users\Julian\Desktop\Abi Plan\ Hier einsteigen.JPG
Speicherort	<ul style="list-style-type: none"> n/a
Beweisnummer	<ul style="list-style-type: none"> image.E01
Wiederherstellungsmethode	<ul style="list-style-type: none"> Geparst
Objekt-ID	171014

Bericht 4

Tags	Von Interesse
Abbild	
Dateiname	Schule außen.JPG
Dateierweiterung	.JPG
Datum/Zeit der Erstellung – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	16.06.2024 16:32:06,000
Letzter Zugriff – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	19.06.2024 07:42:04,812
Zuletzt modifiziert – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	16.06.2024 13:16:16,000
Größe (Bytes)	484570
Hautfarbenprozensatz	19.9
Originalbreite	1200
Originalhöhe	1600
Exif-Extrahierungsstatus	Complete
Datum/Zeit der Erstellung– Lokale Zeit (tt-mm-jjjj)	2024-07-03 13:16:16.000

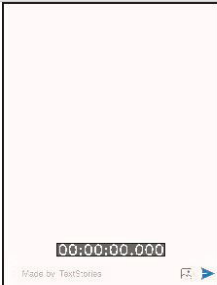






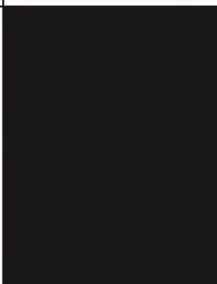
Pictures

Modifiziert – Datum/Zeit – Lokale Zeit	2024-07-03 13:16:16.000
Exif-Daten	Extraction Result: Complete ImageWidth: 1200 ImageHeight: 1600 DateTimeOriginal: 07/03/2024 13:16:16 CreateDate: 07/03/2024 13:16:16 ModifyDate: 07/03/2024 13:16:16
MD5-Hash	2b9bd2745c7543a9017689f7b1b130fe
SHA1-Hash	e90a415e38146d9d6db555e5047c6cb394d6a564
_rawData	[Binäre Daten]
Quelle	<ul style="list-style-type: none"> image.E01 - Partition 3 (Microsoft NTFS, 103,53 GB) Windows\Users\Julian\Desktop\Abi Plan\Schule außen.JPG
Speicherort	<ul style="list-style-type: none"> n/a
Beweisnummer	<ul style="list-style-type: none"> image.E01
Wiederherstellungsmethode	<ul style="list-style-type: none"> Geparst
Objekt-ID	171151

Bericht 5

Tags	Von Interesse
Abbild	
Dateiname	Schule von oben (Plan).png
Dateierweiterung	.png
Datum/Zeit der Erstellung – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	16.06.2024 16:32:06,000
Letzter Zugriff – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	19.06.2024 07:42:04,812
Zuletzt modifiziert – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	16.06.2024 16:59:44,000
Größe (Bytes)	2800833
Hautfarbenprozentsatz	25.5
Originalbreite	1569
Originalhöhe	920
Exif-Extrahierungsstatus	Complete
Exif-Daten	Extraction Result: Complete ImageWidth: 1569 ImageHeight: 920
MD5-Hash	a80179f688c7b3650c9b1682c7b9e8dd
SHA1-Hash	b9f603dffb209580b7ad872ad59647854d443259
_rawData	[Binäre Daten]
Quelle	<ul style="list-style-type: none"> image.E01 - Partition 3 (Microsoft NTFS, 103,53 GB) Windows\Users\Julian\Desktop\Abi Plan\Schule von oben (Plan).png
Speicherort	<ul style="list-style-type: none"> n/a
Beweisnummer	<ul style="list-style-type: none"> image.E01
Wiederherstellungsmethode	<ul style="list-style-type: none"> Geparst
Objekt-ID	171169

Bericht 1

Tags Abbild	Beweis
	   
	   
Dateiname	Verkauf.mp4
Dateierweiterung	.mp4
Datum/Zeit der Erstellung – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	19.06.2024 07:40:41,549
Letzter Zugriff – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	19.06.2024 07:40:41,705
Zuletzt modifiziert – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	19.06.2024 07:32:04,000
Dateigröße (Bytes)	4114695
Hautfarbenprozensatz	0.8
Exif-Extrahierungsstatus	Complete
Mediendauer (Sekunden)	49.37
Originalbreite	1124
Originalhöhe	1500
MD5-Hash	585f08d29c75edd776f51b6fcb345148
SHA1-Hash	82239be45d6c393f38d78cb06f32649159989738
Exif-Daten	Extraction Result: Complete ImageWidth: 1124 ImageHeight: 1500 Duration: 49.37 Encoder: Lavf59.16.100
_Video	[Binäre Daten]
Quelle	<ul style="list-style-type: none"> image.E01 - Partition 3 (Microsoft NTFS, 103,53 GB) Windows\Users\Julian\Desktop\Verkauf.mp4
Speicherort	<ul style="list-style-type: none"> n/a
Beweisnummer	<ul style="list-style-type: none"> image.E01
Wiederherstellungsmethode	<ul style="list-style-type: none"> Geparst
Objekt-ID	123821

Bericht 1

Tags	Beweis
Dateiname	Abipruefung_Mathe.docx
Datei	[Binäre Daten]
Datum/Zeit der letzten Modifikation auf das Dateisystem – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.06.2024 22:05:24,000
Datum/Zeit des letzten Zugriffs auf das Dateisystem – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.06.2024 00:00:00,000
Dateisystem erstellt – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	08.01.2024 14:28:47,000
Größe (Bytes)	298141
Titel	Abiturklausur Analysis
Gespeicherte Größe (Bytes)	298141
Autoren	Kultusministerium
Letzter Autor	Enrico Leutsch
Zuletzt gedruckt – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.01.2000 17:33:00,000
Zuletzt modifiziert – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	01.07.2024 14:41:00,000
Datum/Zeit der Erstellung – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	30.06.2024 18:45:00,000
Unternehmen	Gymnasium
MD5-Hash	979430fe31bc47749ec28f99ce592c84
SHA1-Hash	632298c23590afe1942d27ff2df4ba1f7de24a7d
Quelle	<ul style="list-style-type: none"> 001.2_USB-Stick.E01 - Partition 1 (Microsoft FAT16, 499,98 MB) BLANK\Abipruefung_Mathe.docx
Speicherort	<ul style="list-style-type: none"> n/a
Beweisnummer	<ul style="list-style-type: none"> 001.2_USB-Stick.E01
Wiederherstellungsmethode	<ul style="list-style-type: none"> Geparst
Objekt-ID	50007

Bericht 2

Tags	Beweis
Dateiname	Abipruefung_Mathe.docx
Datei	[Binäre Daten]
Datum/Zeit der letzten Modifikation auf das Dateisystem – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	01.02.2024 17:05:22,000
Datum/Zeit des letzten Zugriffs auf das Dateisystem – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.06.2024 21:41:42,967
Dateisystem erstellt – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.06.2024 21:41:16,618
Größe (Bytes)	382110
Titel	Abiturklausur Analysis
Gespeicherte Größe (Bytes)	382110
Autoren	Kultusministerium
Letzter Autor	Enrico Leutsch
Zuletzt gedruckt – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.01.2000 17:33:00,000
Zuletzt modifiziert – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	01.07.2024 14:41:00,000
Datum/Zeit der Erstellung – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	30.06.2024 18:24:00,000
Unternehmen	Gymnasium

MD5-Hash	c518aea778b2d7a1c1d583083e130d3d
SHA1-Hash	c23d6459fbe204b6d2651e3d8d6b41e2434020a5
Quelle	<ul style="list-style-type: none"> image.E01 - Partition 3 (Microsoft NTFS, 103,53 GB) Windows\Users\Julian\Desktop\Mathe Abi \Abprüfung_Mathe.docx
Speicherort	<ul style="list-style-type: none"> n/a
Beweisnummer	<ul style="list-style-type: none"> image.E01
Wiederherstellungsmethode	<ul style="list-style-type: none"> Geparst
Objekt-ID	170976

Bericht 3

Tags	Beweis
Dateiname	Abprüfung_Mathe.docx
Datei	[Binäre Daten]
Datum/Zeit der letzten Modifikation auf das Dateisystem – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.06.2024 22:05:24,000
Datum/Zeit des letzten Zugriffs auf das Dateisystem – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.06.2024 22:10:39,187
Dateisystem erstellt – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.06.2024 22:10:27,938
Größe (Bytes)	298141
Titel	Abiturklausur Analysis
Gespeicherte Größe (Bytes)	298141
Autoren	Kultusministerium
Letzter Autor	Enrico Leutsch
Zuletzt gedruckt – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.01.2000 17:33:00,000
Zuletzt modifiziert – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	01.07.2024 14:41:00,000
Datum/Zeit der Erstellung – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	30.06.2024 18:45:00,000
Unternehmen	Gymnasium
MD5-Hash	979430fe31bc47749ec28f99ce592c84
SHA1-Hash	632298c23590afe1942d27ff2df4ba1f7de24a7d
Quelle	<ul style="list-style-type: none"> image.E01 - Partition 3 (Microsoft NTFS, 103,53 GB) Windows\Users\Julian\Desktop\Mathe Abi \mein Ding\Abprüfung_Mathe.docx
Speicherort	<ul style="list-style-type: none"> n/a
Beweisnummer	<ul style="list-style-type: none"> image.E01
Wiederherstellungsmethode	<ul style="list-style-type: none"> Geparst
Objekt-ID	205581

Bericht 1

Tags	Beweis
Ereignis-ID	1006
Datum/Zeit der Erstellung – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.06.2024 21:40:23,758
Ereignisdatensatz-ID	7
Ereignisbeschreibung – Zusammenfassung	Storage Device General UDisk Connected.
Aktion	Connected
Gesamtkapazität (Bytes)	524288000
Hersteller	General
Modell	UDisk
Seriennummer	2310141704531295473406
Übergeordnete ID	USB\VID_ABCD&PID_1234\2310141704531295473406
Seriennummer des Speichermediums	D98E7BF0
Ereignisdatum	<pre><Event xmlns="http://schemas.microsoft.com/win/2004/08/events/event" > <System> <Provider Name="Microsoft-Windows-Partition" Guid="412bdf2-a8c4-470d-8f33-63fe0d8c20e2" / > > <EventID>1006</EventID> <Version>4</Version> <Level>4</Level> <Task>0</Task> <Opcode>0</Opcode> <Keywords>0x8000000000000000</Keywords> <TimeCreated SystemTime="2024-06-18T19:40:23.7587597Z" /> <EventRecordID>7</EventRecordID> <Correlation /> <Execution ProcessID="4" ThreadID="2768" /> <Channel>Microsoft-Windows-Partition/Diagnostic</Channel> <Computer>WIN-3741BB68JLI</Computer> <Security UserID="S-1-5-18" /> </System> <EventData> <Data Name="DiskNumber">1</Data> <Data Name="Flags">8208</Data> <Data Name="Characteristics">262401</Data> <Data Name="IsSystemCritical">False</Data> <Data Name="PagingCount">0</Data> <Data Name="HibernationCount">0</Data> <Data Name="DumpCount">0</Data> <Data Name="BytesPerSector">512</Data> <Data Name="Capacity">524288000</Data> <Data Name="BusType">7</Data> <Data Name="Manufacturer">General</Data> <Data Name="Model">UDisk</Data> <Data Name="Revision">5.00</Data> <Data Name="SerialNumber">2310141704531295473406</Data> <Data Name="Location">Integrated : Bus 0 : Device 0 : Function 1 : Adapter 0 : Port 0</Data> a> <Data Name="ParentId">USB\VID_ABCD&PID_1234\2310141704531295473406</Data> <Data Name="Socket">-1</Data> <Data Name="Slot">-1</Data> <Data Name="Bus">0</Data> <Data Name="Device">0</Data> <Data Name="Function">1</Data> <Data Name="Adapter">0</Data> <Data Name="Port">0</Data> <Data Name="Target">0</Data> <Data Name="Lun">0</Data> <Data Name="IoctlSupport">59649</Data> <Data Name="IdFlags">0</Data> <Data Name="DiskId">83f1a2f8-ed7e-551-338b-7173368c3633</Data> <Data Name="AdapterId">00000000-0000-0000-0000-000000000000</Data> <Data Name="RegistryId">b0ff818f-3d92-11ed-964f-5800e3db0f9c</Data></pre>

Windows Event Logs - Storage Device Events

Quelle	<ul style="list-style-type: none"> image.E01 - Partition 3 (Microsoft NTFS, 103,53 GB) Windows\Windows\System32\winevt\Logs\Microsoft-Windows-Partition%4Diagnostic.evtx
Speicherort	<ul style="list-style-type: none"> File Offset 27776
Beweisnummer	<ul style="list-style-type: none"> image.E01
Wiederherstellungsmethode	<ul style="list-style-type: none"> Geparst
Objekt-ID	182514

Bericht 2

Tags	Beweis
Ereignis-ID	1006
Datum/Zeit der Erstellung – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.06.2024 22:12:21,569
Ereignisdatensatz-ID	10
Ereignisbeschreibung – Zusammenfassung	Storage Device General UDisk Connected.
Aktion	Connected
Gesamtkapazität (Bytes)	524288000
Hersteller	General
Modell	UDisk
Seriennummer	2310141704531295473406
Übergeordnete ID	USB\VID_ABCD&PID_1234\2310141704531295473406

Ereignisdatum	<pre> <Event xmlns="http://schemas.microsoft.com/win/2004/08/events/event"> <System> <Provider Name="Microsoft-Windows-Partition" Guid="412bdf2-a8c4-470d-8f33-63fe0d8c20e2" / > <EventID>1006</EventID> <Version>4</Version> <Level>4</Level> <Task>0</Task> <Opcode>0</Opcode> <Keywords>0x8000000000000000</Keywords> <TimeCreated SystemTime="2024-06-18T20:12:21.5699920Z" /> <EventRecordID>10</EventRecordID> <Correlation /> <Execution ProcessID="4" ThreadID="8332" /> <Channel>Microsoft-Windows-Partition/Diagnostic</Channel> <Computer>WIN-374IBB68JLI</Computer> <Security UserID="S-1-5-18" /> </System> <EventData> <Data Name="DiskNumber">1</Data> <Data Name="Flags">8208</Data> <Data Name="Characteristics">262401</Data> <Data Name="IsSystemCritical">False</Data> <Data Name="PagingCount">0</Data> <Data Name="HibernationCount">0</Data> <Data Name="DumpCount">0</Data> <Data Name="BytesPerSector">512</Data> <Data Name="Capacity">524288000</Data> <Data Name="BusType">7</Data> <Data Name="Manufacturer">General</Data> <Data Name="Model">UDisk</Data> <Data Name="Revision">5.00</Data> <Data Name="SerialNumber">2310141704531295473406</Data> <Data Name="Location">Integrated : Bus 0 : Device 0 : Function 1 : Adapter 0 : Port 0</Data> a> <Data Name="ParentId">USB\VID_ABCD&PID_1234\2310141704531295473406</Data> <Data Name="Socket">-1</Data> <Data Name="Slot">-1</Data> <Data Name="Bus">0</Data> <Data Name="Device">0</Data> <Data Name="Function">1</Data> <Data Name="Adapter">0</Data> <Data Name="Port">0</Data> <Data Name="Target">0</Data> <Data Name="Lun">0</Data> <Data Name="IoctlSupport">92417</Data> <Data Name="IdFlags">0</Data> <Data Name="DiskId">83f1a2f8-ede7-e551-338b-7173368c3633</Data> <Data Name="AdapterId">00000000-0000-0000-0000-000000000000</Data> <Data Name="RegistryId">b0ff818f-3d92-11ed-964f-5800e3db0f9c</Data> </pre>
---------------	--

Ereignisdatum	<pre> <Data Name="PoolId">00000000-0000-0000-0000-000000000000</Data> <Data Name="FirmwareSupportsUpgrade">False</Data> <Data Name="FirmwareSlotCount">0</Data> <Data Name="StorageIdCount">0</Data> <Data Name="StorageIdCodeSet">0</Data> <Data Name="StorageIdType">0</Data> <Data Name="StorageIdAssociation">0</Data> <Data Name="StorageIdBytes">0</Data> <Data Name="StorageId"></Data> <Data Name="WriteCacheType">0</Data> <Data Name="WriteCacheEnabled">0</Data> <Data Name="WriteCacheChangeable">0</Data> <Data Name="WriteThroughSupported">0</Data> <Data Name="FlushCacheSupported">False</Data> <Data Name="IsPowerProtected">False</Data> <Data Name="NVCacheEnabled">False</Data> <Data Name="BytesPerLogicalSector">0</Data> <Data Name="BytesPerPhysicalSector">0</Data> <Data Name="BytesOffsetForSectorAlignment">0</Data> <Data Name="IncursSeekPenalty">False</Data> <Data Name="IsTrimSupported">False</Data> <Data Name="IsThinProvisioned">False</Data> <Data Name="OptimalUnmapGranularity">0</Data> <Data Name="UnmapAlignment">0</Data> <Data Name="NumberOfLogicalCopies">0</Data> <Data Name="NumberOfPhysicalCopies">0</Data> <Data Name="FaultTolerance">0</Data> <Data Name="NumberOfColumns">0</Data> <Data Name="InterleaveBytes">0</Data> <Data Name="HybridSupported">False</Data> <Data Name="HybridCacheBytes">0</Data> <Data Name="AdapterMaximumTransferBytes">65536</Data> <Data Name="AdapterMaximumTransferPages">17</Data> <Data Name="AdapterAlignmentMask">0</Data> <Data Name="AdapterSerialNumber">NULL</Data> <Data Name="PortDriver">5</Data> <Data Name="UserRemovalPolicy">True</Data> <Data Name="PartitionStyle">0</Data> <Data Name="PartitionCount">0</Data> <Data Name="PartitionTableBytes">0</Data> <Data Name="PartitionTable"></Data> <Data Name="MbrBytes">0</Data> <Data Name="Mbr"></Data> <Data Name="Vbr0Bytes">0</Data> <Data Name="Vbr0"></Data> <Data Name="Vbr1Bytes">0</Data> <Data Name="Vbr1"></Data> <Data Name="Vbr2Bytes">0</Data> <Data Name="Vbr2"></Data> <Data Name="Vbr3Size">0</Data> </pre>
Ereignisdatum	<pre> <Data Name="Vbr3"></Data> </EventData> </Event> </pre>
Quelle	<ul style="list-style-type: none"> image.E01 - Partition 3 (Microsoft NTFS, 103,53 GB) Windows\Windows\System32\winevt\Logs\Microsoft-Windows-Partition%4Diagnostic.evtx
Speicherort	<ul style="list-style-type: none"> File Offset 33960
Beweisnummer	<ul style="list-style-type: none"> image.E01
Wiederherstellungsmethode	<ul style="list-style-type: none"> Geparst
Objekt-ID	182606

Bericht 1

Tags	Beweis
Titel	Hardware kann jetzt entfernt werden.
Subtext	Das Gerät "USB-Massenspeichergerät" kann jetzt vom Computer entfernt werden.
Empfangen – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.06.2024 22:12:21,800
Ablaufdatum/-zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	21.06.2024 22:12:21,800
Quelle	<ul style="list-style-type: none"> image.E01 - Partition 3 (Microsoft NTFS, 103,53 GB) Windows\Users\Julian\AppData\Local\Microsoft\Windows\Notifications\wpndatabase.db
Speicherort	<ul style="list-style-type: none"> File Offset 378417
Beweisnummer	<ul style="list-style-type: none"> image.E01
Wiederherstellungsmethode	<ul style="list-style-type: none"> Gecarvt
Objekt-ID	288509

Bericht 1

Tags	Beweis
Anwendungsname	Microsoft.Office.WINWORD.EXE.15
Displayname	AbiprÃ¼fung_Mathe.docx (Word 2016)
Inhalt	C:\Users\Julian\Desktop\Mathe Abi\AbiprÃ¼fung_Mathe.docx (file:///C:/Users/Julian/Desktop/Mathe%20Abi/Abipr%FCfung_Mathe.docx?Volumeld={0976F2E8-03DA-4A65-B661-0AD45D1B50BF}&ObjectId={B0FF81AC-3D92-11ED-964F-5800E3DB0F9C}&KnownFolderId=ThisPCDesktopFolder&KnownFolderLength=23)
Aktivitätstyp	Open App/File/Page
Fokussierung (Sekunden)	0
Startdatum/-zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.06.2024 21:42:07,000
Aktivitäts-ID	2468aa96-ff3c-8135-43ea-26e16b759345
Plattform	windows_win32
Zuletzt modifiziert – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.06.2024 21:42:07,000
Zuletzt auf Client modifiziert – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.06.2024 21:42:07,000
Nur lokal	False
Quelle	<ul style="list-style-type: none"> image.E01 - Partition 3 (Microsoft NTFS, 103,53 GB) Windows\Users\Julian\AppData\Local\ConnectedDevicesPlatform\L.Julian\ActivitiesCache.db
Speicherort	<ul style="list-style-type: none"> Table: Activity(rowid: 27)
Beweisnummer	<ul style="list-style-type: none"> image.E01
Wiederherstellungsmethode	<ul style="list-style-type: none"> Geparst
Objekt-ID	244879

Bericht 2

Tags	Beweis
Anwendungsname	Microsoft.Office.WINWORD.EXE.15
Displayname	AbiprÃ¼fung_Mathe.docx (Word 2016)
Inhalt	C:\Users\Julian\Desktop\Mathe Abi\mein Ding\AbiprÃ¼fung_Mathe.docx (file:///C:/Users/Julian/Desktop/Mathe%20Abi/mein%20Ding/Abipr%FCfung_Mathe.docx?Volumeld={0976F2E8-03DA-4A65-B661-0AD45D1B50BF}&ObjectId={B0FF81CD-3D92-11ED-964F-5800E3DB0F9C}&KnownFolderId=ThisPCDesktopFolder&KnownFolderLength=23)
Aktivitätstyp	Open App/File/Page
Fokussierung (Sekunden)	0
Startdatum/-zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.06.2024 22:10:47,000
Aktivitäts-ID	ae017c11-a83e-a51e-1164-14f1df8a0eb8
Plattform	windows_win32
Zuletzt modifiziert – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.06.2024 22:10:47,000
Zuletzt auf Client modifiziert – Datum/Zeit – UTC+01:00 (dd.MM.yyyy)[DST]	18.06.2024 22:10:47,000
Nur lokal	False
Quelle	<ul style="list-style-type: none"> image.E01 - Partition 3 (Microsoft NTFS, 103,53 GB) Windows\Users\Julian\AppData\Local\ConnectedDevicesPlatform\L.Julian\ActivitiesCache.db
Speicherort	<ul style="list-style-type: none"> Table: Activity(rowid: 32)
Beweisnummer	<ul style="list-style-type: none"> image.E01
Wiederherstellungsmethode	<ul style="list-style-type: none"> Geparst
Objekt-ID	244885

Files

Bericht 1

Tags	Beweis
Name	Abprüfung_Mathe.docx
Typ	Image
File extension	.docx
File size	0
Created	06.07.2024 14:40:10,720
Accessed	06.07.2024 00:00:00,000
Modified	06.07.2024 14:40:12,000
Gelöscht	Gelöscht
File attributes	Archive
Quelle	<ul style="list-style-type: none">• 001.2_USB-Stick.E01 - Partition 1 (Microsoft FAT16, 499,98 MB) BLANK\Abprüfung_Mathe.docx
Speicherort	<ul style="list-style-type: none">• n/a
Beweisnummer	<ul style="list-style-type: none">• 001.2_USB-Stick.E01
Objekt-ID	350001

C Abipruefung_Mathe.dox im Original

Gymnasium

Abiturklausur Analysis

Kultusministerium
1.2.2024

Note	Erreichte Punkte (gesamt)	Prozent (%)
1+ (15)	112 - 120	93 - 100
1 (14)	106 - 111	88 - 92
1- (13)	100 - 105	82 - 87
2+ (12)	93 - 99	77 - 81
2 (11)	87 - 92	71 - 76
2- (10)	81 - 86	66 - 70
3+ (9)	74 - 80	60 - 65
3 (8)	68 - 73	55 - 59
3- (7)	62 - 67	49 - 54
4+ (6)	55 - 61	43 - 48
4 (5)	49 - 54	38 - 42
4- (4)	43 - 48	33 - 37
5+ (3)	36 - 42	27 - 32
5 (2)	30 - 35	21 - 26
5- (1)	24 - 29	16 - 20
6 (0)	0 - 23	0 - 15

Aufgabe	Punkte pro Aufgabe (max. 15)	Gesamtpunkte (max. 105)
Aufgabe a	15	15
Aufgabe b	15	30
Aufgabe c	15	45
Aufgabe d	15	60
Aufgabe e	15	75
Aufgabe f	15	90
Aufgabe g	15	105
Aufgabe h	15	120

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2 x^2$$

- a) Untersuche die Funktion f_t auf Symmetrie.
- b) Berechne die Schnittpunkte der Graphen der Funktion f_t mit der x -Achse.
- c) Untersuche den Graphen der Funktion f_t auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte.
- d) Auf welcher Kurve liegen die lokalen Maximumpunkte der Graphen aller Funktionen f_t ?
Gib eine Gleichung dieser Ortskurve an.
- e) Skizziere den Graphen der Funktion f_2 im Intervall $-5 \leq x \leq 5$.

- f) Die Punkte $P_1 \left(t; \frac{5}{9}t^2 \right)$, $P_2 (t\sqrt{6}; 0)$, $P_3 (-t\sqrt{6}; 0)$ liegen auf dem Graphen einer quadratischen Funktion. Ermittle eine Gleichung dieser quadratischen Funktion.

- g) Die Verbindungsgerade der beiden Maximum-Punkte des Graphen von f_2 schneidet die y -Achse im Punkt S .

Der Punkt S und die beiden Kurvenpunkte $P \left(x_p; f_2(x_p) \right)$ und $Q \left(-x_p; f_2(-x_p) \right)$ mit $0 < x_p < 2\sqrt{3}$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks QPS .

Für welchen Wert von x_p wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal? Gib den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks QPS an.

- h) Der Graph von f_t , die Tangente an den Graphen im Wendepunkt im 1. Quadranten und die x -Achse begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt $A(t)$. Berechne $A(t)$.

a) Untersuche die Funktion f_t auf Symmetrie.

Die Symmetrie-Untersuchung prüft, ob in die Funktionskurve (Graph) eine Symmetrieachse parallel zur y - Achse eingezeichnet werden kann. Dann könnte praktisch der Kurvenverlauf links und rechts der Symmetrieachse exakt "aufeinandergelegt" werden.

Um die Symmetrie zu prüfen, werden für alle x - Werte die Vorzeichen gewechselt. Wenn dann die Funktionswerte (y - Werte) für die x - Werte sowohl mit positivem als auch negativem Vorzeichen gleich sind, ist die Funktion symmetrisch.

Bei geradem Exponenten (Potenz) von x erhält man sowohl für positive wie für negative x - Werte dasselbe (positive) Ergebnis. Das liegt daran, dass plus mal plus = plus ist und minus mal minus = plus ist. Das Quadrat eines x - Wertes hat demnach genau genommen immer zwei Lösungen.

Beispiel

$$x \cdot x = x^2 \qquad -x \cdot -x = x^2$$

Das gilt wie gesagt für jede Potenz mit geradem Exponenten. Weil eine Funktionsgleichung formal ein Polynom darstellt, kann man auch sagen, **wenn das Polynom gerade Exponenten (Potenzen) hat, dann ist die Funktion symmetrisch.**

Die Funktion

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2 x^2$$

ergibt mit gewechseltem Vorzeichen

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}(-x)^4 + \frac{2}{3}t^2(-x)^2 = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2 x^2$$

was wiederum genau $= f_t(x)$ ist. Also ist $f_t(x)$ **achsensymmetrisch zur y - Achse.**

Hinweis: Der Vorzeichenwechsel wird nur bei den **x** - Werten vorgenommen, nicht bei eventuellen anderen Variablen. In der vorliegenden Funktion gibt es eine weitere Variable **t**. Sie wird auch *Parameter* genannt ist Bestandteil des Koeffizienten (Beifaktor) für **x**.

b) Berechne die Schnittpunkte der Graphen der Funktion f_t mit der x - Achse.

Wenn die Funktionskurve (Graph) die x - Achse schneidet, dann ist der zugehörige y - Wert zwangsläufig $= 0$. Um also die Schnittpunkte mit den x - Achsen zu finden, muss man die Funktionsgleichung

$y = f_t(x) = 0$ setzen und dafür nach Lösungen (x - Werten) suchen. Man nennt die Schnittpunkte mit der x - Achse **Nullstellen der Funktion**.

$$f_t(0) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2$$

Um die Lösungen zu finden, wird die Gleichung in geeigneter Weise umgeformt, um sie für die Berechnung zu vereinfachen. Das ist nicht immer leicht und erfordert viel Übung. Am einfachsten lassen sich Gleichungen mit dem Exponenten 1 (lineare Gleichungen) und dem Exponenten 2 (quadratische Gleichungen) umformen. Dazu gehören in gewisser Weise auch die Gleichungen mit einem Exponenten, der ein Vielfaches von 2 ist, denn dann kann man **ausklammern** oder **faktorisieren**.

In der vorliegenden Gleichung ist x^2 in beiden x - Werte enthalten und kann daher als Faktor ausgeklammert werden.

$$f_t(0) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2 = x^2\left(-\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}t^2\right)$$

Die einfachsten Nullstellen sind die, wenn x selbst $= 0$ ist. Weil x^2 nach dem Ausklammern als Faktor steht würde die ganze Gleichung $= 0$ sein, wenn $x = 0$ ist. Denn etwas mit 0 multipliziert ergibt immer 0, egal wie groß der zweite Faktor (der Klammerausdruck) ist. Man spricht bei der Nullstelle $x = 0$ auch manchmal von **trivialer Nullstelle**, weil sie recht einfach zu finden ist.

Daher findet man als Lösung: $x = 0$. Wie bereits oben festgestellt, gibt es für ein x^2 zwei x - Lösungen, nämlich eine positive und eine negative. Auch wenn man sich schwer vorstellen kann, worin sich $+0$; -0 ; 0^2 unterscheiden, so sind die beiden Lösungen doch völlig korrekt.

$$x_{1,2} = 0$$

Man spricht hier auch von einer **Doppel-Nullstelle**.

Damit sind noch nicht alle Lösungen für $y = f_t(x) = 0$ gefunden, denn auch der Klammerausdruck stellt einen Faktor dar, der $= 0$ sein kann und dann die ganze Gleichung $= 0$ wäre. Also muss man sozusagen "Unterlösungen" finden für die Gleichung

$$\left(-\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}t^2\right) = 0$$

Der Klammerausdruck stellt eine Summe dar. Eine Summe ergibt $= 0$, wenn die Summanden gleich groß sind, aber verschiedene Vorzeichen haben. In der vorliegenden Summe haben beide Summanden verschiedene Vorzeichen. Wenn also gilt

$$\frac{1}{9}x^2 = \frac{2}{3}t^2 \quad \text{dann wird der Klammerausdruck} = 0, \text{ denn die Summanden heben sich gegenseitig auf.}$$

Also muss man für $\frac{1}{9}x^2 = \frac{2}{3}t^2$ eine Lösung für x finden.

$$\frac{1}{9}x^2 = \frac{2}{3}t^2 \quad | \quad : \frac{1}{9}$$

$$x^2 = \frac{9}{1} \cdot \frac{2}{3}t^2 = \frac{18}{3}t^2 = 6t^2$$

$$x = \sqrt{6t^2} = \sqrt{6} \cdot t$$

Weil auch hier wieder zwei Lösungen für x möglich sind, heißen die beiden Lösungen

$$x_3 = \sqrt{6} t$$

$$x_4 = -\sqrt{6} t$$

Die Schnittpunkte mit der x - Achse haben demnach folgende Koordinaten (x;y - Paare)

$$P_1(0;0)$$

$$P_2(\sqrt{6}t;0)$$

$$P_3(-\sqrt{6}t;0)$$

Natürlich müssen die y - Werte immer = 0 sein.

c) Untersuche den Graphen der Funktion f_t auf lokale [Extrempunkte](#) und [Wendepunkte](#).

Die hauptsächlichen Rechenoperationen bei der Differenzialrechnung dienen zur Ermittlung der Koordinaten (x ; y - Werte) ganz bestimmter Punkte der Funktionskurve. Zu diesen Punkten zählen v.a. die Nullstellen, die Extrempunkte und die Wendepunkte. Diese Punkte sind deshalb so interessant, weil man sich mit ihrer Kenntnis ein Bild über den Kurvenverlauf machen kann und sich so die ganze Funktion besser vorstellen kann.

Extrempunkte einer Funktion sind solche Punkte, wo der y - Wert am größten oder am kleinsten wird. Das heißt, dort geht die Funktionskurve im Koordinatensystem am weitesten (positiv) nach oben oder am weitesten (negativ) nach unten.

Für die Berechnung der Extrempunkte bedient man sich der Rechenmittel, die Isaac Newton (sprich: eisa-ak njuten) und Gottfried Leibniz entwickelt haben und die im Grunde auf einer Ermittlung einer Funktionsgleichung für eine Tangente an die Kurve beruhen. Über diese Rechnungen sollte man sich im besonderen informieren. Hier sei nur soviel gesagt:

Um einen Extrempunkt zu berechnen, muss man die [1. Ableitung](#) der Funktion bilden. Die 1. Ableitung ist immer auch gleichbedeutend mit dem Anstieg der Tangente im Extrempunkt. Es wird also praktisch für die ursprüngliche Funktionsgleichung eine dazugehörige weitere Funktion gesucht. Um die Ableitung zu bilden, gibt es zwei hauptsächliche Verfahren. Das eine funktioniert mittels einer Grenzwert-Berechnung und kann ziemlich umfangreich sein. Das andere Verfahren ist die Anwendung von Ableitungsregeln, die in Formelsammlungen zu finden ist. Solche Ableitungsregeln kann man sich einprägen oder man kann sie bei Bedarf nachlesen.

Eine der häufigsten Ableitungen ist die von Potenzen bzw. Potenzfunktionen. Ihre allgemeine Form ist

$$f'(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

Das heißt, der Exponent wird als Faktor vor den x - Wert gesetzt und der x - Wert erhält den neuen um 1 verminderten Exponenten.

Beispiele

$$f'(x^2) = 2x$$

$$f'(2x^3) = 6x^2$$

Die 1. Ableitung wird immer mit einem hochgestellten Beistrich gekennzeichnet, jede höhere Ableitung mit entsprechenden vielen Beistrichen.

Weil man von jeder Funktion eine Ableitung bilden kann, kann man zwangsläufig auch von einer Ableitung wieder eine Ableitung bilden. Für die Differenzialrechnung spielen die ersten 3 Ableitungen einer Funktion eine Rolle.

Für diese Funktionsgleichung lauten die ersten 3 Ableitungen

$$f'(x) = -\frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}t^2x$$

$$f''(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}t^2$$

$$f'''(x) = -\frac{8}{3}x$$

Bei der 2. Ableitung ist zu beachten, dass t ein Parameter ist. Der ganze Ausdruck $\frac{4}{3}t^2$ wird deshalb wie eine konstante Zahl behandelt. Die Ableitung einer konstanten Zahl ist immer = 0. Daher fällt der ganze Ausdruck in der 3. Ableitung weg.

Mit Hilfe der Ableitungen können nun die Extrempunkte und Wendestellen ermittelt werden. Für einen lokalen Extrempunkt gilt, dass die **1. Ableitung = 0** ist. Also werden Lösungen für die Gleichung gesucht:

$$-\frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}t^2x = 0$$

Weil es für die Lösung einer kubischen Gleichung (mit Exponent 3) nur schwierige Rechenwege gibt, sollte die Gleichung vereinfacht werden. Das geschieht wieder durch Ausklammern.

$$x\left(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}t^2\right) = 0$$

Nach den Gesetzen der Multiplikation, wonach das Produkt = 0 wird, wenn mindestens ein Faktor = 0 ist, erhält man die Lösung

$$x_1 = 0$$

An dieser Stelle auf der x - Achse liegt also ein Extrempunkt der Funktion. Setzt man diesen x - Wert in die Anfangsgleichung ein, erhält man für y ebenfalls 0. Man kommt hier zu dem Ergebnis, das mit der Nullstelle der Funktion identisch ist.

Normalerweise werden zunächst alle Extrempunkte ermittelt und dann geprüft, ob es sich um lokales Maximum (höchster Punkt) oder lokales Minimum (tiefster Punkt) handelt. Die Methode für diese Prüfung soll gleich hier besprochen werden. Man braucht dafür die 2. Ableitung. Es gilt allgemein

- Wenn die 2. Ableitung für den eingesetzten x - Wert (Extremwert) **größer als 0 ist, dann handelt es sich um ein Minimum (Tiefpunkt)**.
- Wenn die 2. Ableitung für den eingesetzten x - Wert (Extremwert) **kleiner als 0 ist, dann handelt es sich um ein Maximum (Hochpunkt)**.

Das Prüfen der Extremwerte mittels der 2. Ableitung bezeichnet man auch als *hinreichende Bedingung*.

Setzt man die Lösung $x_1 = 0$ in die 2. Ableitung ein, erhält man

$f''(0) = \frac{4}{3}t^2$ und das ist immer > (größer als) 0, weil nach der Voraussetzung $t > 0$ ist. Also handelt es sich um ein lokales Minimum $E_1 (0; 0)$

Nun sollen weitere mögliche Extrempunkte ermittelt werden. Aus der Gleichung

$$x\left(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}t^2\right) = 0$$

kann auch der Klammerausdruck = 0 sein. Dafür würde gelten

$$\frac{4}{9}x^2 = \frac{4}{3}t^2 \quad | : \frac{4}{9}$$

$$x^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3}t^2 = 3t^2$$

$$x_2 = \sqrt{3}t$$

$$x_3 = -\sqrt{3}t$$

Die beiden x - Werte für die Extrempunkte werden in die Anfangsgleichung eingesetzt.

$$f_t(\pm\sqrt{3}t) = -\frac{1}{9} \cdot 9t^4 + \frac{2}{3}t^2 \cdot 3t^2 = t^4$$

Die Extrempunkte haben demnach die Koordinaten

$$E_2 \quad (\sqrt{3}t; t^4)$$

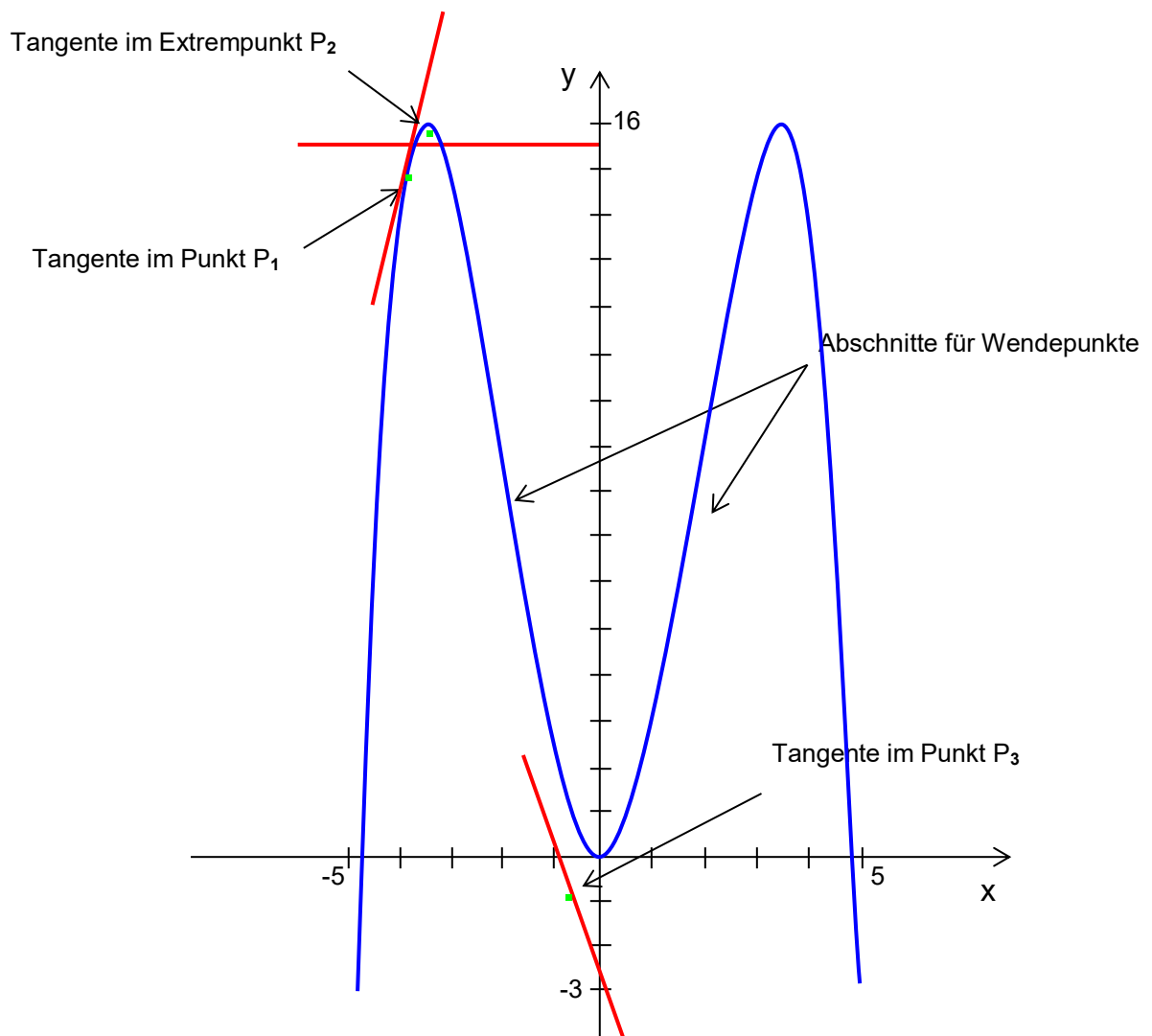
$$E_3 \quad (-\sqrt{3}t; t^4)$$

Auch für diese beiden Extrempunkte wird mittels der 2. Ableitung geprüft, ob es Hoch- oder Tiefpunkte sind.

$$f''(\pm\sqrt{3}t) = -\frac{4}{3} \cdot 3t^2 + \frac{4}{3}t^2 = \frac{8}{3}t^2 < 0$$

Es handelt sich in beiden Fällen um lokale Maxima (Hochpunkte).

Nun soll die Funktion auf Wendepunkte untersucht werden. Um zu verstehen, was ein Wendepunkt ist, kann man sich die Skizze des Funktions-Graphen ansehen, die hier schon vor der Teilaufgabe **e)** gezeigt werden soll.



Man kann sich vorstellen, dass die Tangenten von links beginnend an der Funktionskurve entlang gleiten und jede Tangente sozusagen durch genau einen Berührungspunkt mit der Kurve hindurch geht.

Wenn die Tangente z.B. vom Punkt P_1 aus an der Kurve entlang gleitet durch den Punkte P_2 bis zum Punkt P_3 , dann ändert sich dazwischen ihr Drehsinn. Während der Gleitbewegung von Punkt P_1 durch den Hochpunkt P_2 hindurch hat die Tangente einen Drehsinn in Uhrzeiger-Richtung. Das heißt, in jedem Punkt der Kurve dreht sich die Tangente ein winziges Stückchen in Uhrzeiger-Richtung. Das geht einher mit der stetigen Änderung des Anstiegs dieser Tangente.

Im Punkt P_3 dreht sich die Tangente aber offensichtlich in entgegengesetzter Uhrzeiger-Richtung. Das wird beim Durchlaufen des Tiefpunktes der Kurve besonders deutlich.

Demnach muss es zwischen P_1 und P_3 logischerweise irgendwo **einen Punkt geben, wo der Drehsinn wechselt**. Dieser Punkt ist der **Wendepunkt** der Funktion. (Der dazugehörige x - Wert auf der x - Achse heißt Wendestelle.)

Die rechnerische Ermittlung des Wendepunktes ergibt sich aus folgender Überlegung. Wie bereits festgestellt, entspricht die 1. Ableitung dem Anstieg der Tangente in einem Punkt der Funktionskurve. Diese 1. Ableitung stellt ihrerseits wiederum eine Funktion dar. Diese Funktion ist das oben beschriebene Entlanggleiten der Tangente an der Kurve. Was geschieht nun, wenn man diese Funktion (also die 1. Ableitung) wiederum als Anfangsfunktion betrachtet und davon die Ableitung bildet? Bezüglich der Ursprungsfunktion wäre das die 2. Ableitung, bezüglich der 1. Ableitung wäre das die 1. Ableitung der 1. Ableitung.

Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist, dass die 2. Ableitung der ursprünglichen Funktion = 0 ist. Demnach muss man Lösungen für folgende Gleichung finden

$$-\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}t^2 = 0$$

$$-\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}t^2 = 0 \quad | \quad +\frac{4}{3}x^2$$

$$\frac{4}{3}t^2 = \frac{4}{3}x^2 \Rightarrow t^2 = x^2$$

$$x_{W1} = t$$

$$x_{W2} = -t$$

Auch für Wendepunkte gibt es eine hinreichende Bedingung, die 3. Ableitung muss ungleich 0 sein.

$$f'''(x) \neq 0 \quad \text{Daraus ergibt sich}$$

$$f'''(\pm t) = \pm \frac{8}{3}t \neq 0 \quad \text{weil nach Voraussetzung } t > 0 \text{ ist.}$$

Setzt man nun die gefundenen x - Werte für die Wendepunkte in die Anfangsgleichung ein, erhält man die vollständigen Koordinaten.

$$W_1 \left(t; \frac{5}{9}t^4 \right)$$

$$W_2 \left(-t; \frac{5}{9}t^4 \right)$$

Es bestehen also folgende **Zusammenhänge**:

- Die 2. Ableitung einer Anfangsfunktion ist die 1. Ableitung der 1. Ableitung dieser Anfangsfunktion.
- Die 1. Ableitung einer Funktion entspricht dem **Anstieg der Tangente** in einem Kurvenpunkt. Wenn die Ableitung = 0 ist, dann ist der Anstieg = 0 und die Tangente liegt parallel zur x - Achse.
- Für einen **Extrempunkt** gilt, dass die 1. Ableitung = 0 sein muss.
- Für einen **Wendepunkt** gilt, dass die 2. Ableitung = 0 sein muss. Da die 2. Ableitung aber wie gesagt auch eine 1. Ableitung darstellt, muss der Wendepunkt auch eine Art Extrempunkt sein. Man sagt deshalb, dass der Wendepunkt ein relativer Extrempunkt der 1. Ableitung (als Funktion) ist. Würde man die 1. Ableitung der Anfangsfunktion als Kurve zeichnen, dann könnte man an diese Kurve auch Tangenten anlegen, wie an jede andere Funktionskurve, denn man sieht einer einzelnen Funktion nicht an, ob es eine Ableitung ist.

Diese Funktionskurve hätte genau in dem Punkt mit den Koordinaten des Wendepunktes der Anfangsfunktion einen lokalen Extrempunkt, dort wäre der Tangentenanstieg = 0.

d) Auf welcher Kurve liegen die lokalen Maximumpunkte der Graphen aller Funktionen f_t ?
Gib eine Gleichung dieser Ortskurve an.

Alle Funktionen f_t ergeben sich durch alle möglichen Werte, die der Parameter t annehmen kann. Und das sind im Grunde unendlich viele, denn die Voraussetzung verlangt nur, dass $t > 0$ sein muss. Demnach kann in der Anfangsgleichung

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2 x^2$$

der Parameter t jeden einzelnen dieser Werte annehmen. Die Frage, die hier gestellt wird, ist: Wo liegen im Koordinaten-System die jeweiligen Maximumpunkte (Hochpunkte) für alle verschiedenen Werte von t ? Würde man t alle möglichen Werte durchlaufen lassen (was z.B. ein Computer-Rechner machen kann), dann müsste man aus jeder dieser Funktionskurven nur die Maximumpunkte notieren. Weil t in die Funktion eingebunden ist und diese Funktion für jeden Wert von t gesetzmäßig verläuft, ist natürlich auch die Menge aller dieser Maximumpunkte gesetzmäßig verteilt.

Die möglichen Maximumpunkte (in Abhängigkeit von t) stellen also ihrerseits eine Funktion dar, für die es selbstverständlich auch eine Kurve (Graphen) gibt.

Nach dieser Funktionskurve ist gefragt. Die Bezeichnung "Ortskurve" ist ein ziemlich altmodischer Ausdruck, der sich wahrscheinlich von dem lateinischen Wort für Ort = locus ableitet. (Weswegen man auch von einem lokalen Extrempunkt spricht). Damit sind die Orte gemeint, die ebenjene Maximumpunkte im Koordinaten-System haben. Praktisch sind diese Orte Punkte, die jeweils durch ein $x - y$ - Wertepaar bestimmt sind. Eine Ortskurve ist also (eigentlich wie jede andere Kurve) eine Menge von Punkten auf einer Linie.

Um nun die Gleichung dieser Ortskurve der Maximumpunkte zu finden, muss man die allgemeine Gleichung für die Maximumpunkte suchen. Bei der Ermittlung der Extrempunkte wurden gefunden

$$E_2 \quad (\sqrt{3}t; t^4)$$

$$E_3 \quad (-\sqrt{3}t; t^4)$$

(Der Extrempunkt E_1 interessiert hier nicht, weil er keine Abhängigkeit zu t hat.)

Ganz egal, welchen Wert t annimmt, der x - Wert ist immer entweder $\sqrt{3}t$ oder $-\sqrt{3}t$. Das heißt, dass der Absolutbetrag von $x = \sqrt{3}t$ ist.

$$|x| = \sqrt{3}t \quad \text{Das kann nach } t \text{ umgestellt werden.}$$

$$t = \frac{|x|}{\sqrt{3}} \Rightarrow t^2 = \frac{x^2}{3} \quad \text{Das kann wiederum in die Anfangsgleichung eingesetzt werden.}$$

$$f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{3} \cdot x^2 = \frac{1}{9}x^4$$

$$y = \frac{1}{9}x^4 \quad \text{So lautet die Funktionsgleichung für die Ortskurve aller Maximumpunkte.}$$

e) Skizziere den Graphen der Funktion f_2 im Intervall $-5 \leq x \leq 5$.

Um den Graphen einer Funktion zu zeichnen, kann man ausgewählte Punkte der Funktion berechnen und im [Koordinatensystem](#) eintragen. Wenn diese Punkte verbunden werden, ergibt sich der Graph der Funktion. Er wird um so genauer, je mehr Punkte berechnet werden. Zu diesen Punkten gehören in jedem Fall die ermittelten Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte. Die Verbindung dieser Punkte gibt meistens schon eine recht gute Skizze der Funktion. Bei nicht-linearen Funktionen sollte man beachten, dass die Punkte niemals durch eine Gerade verbunden sind, sondern immer durch eine gekrümmte Linie, auch wenn die Krümmung in kleinen Kurvenabschnitten nicht mehr erkennbar ist.

Der Graph wird in ein Koordinatensystem mit x - und y - Achse eingezeichnet. Diese Achsen heißen auch Abzisse (x - Achse) und Ordinate (y - Achse). Manchmal spricht man auch von Kartesischen Koordinatensystem, weil es auf die Überlegungen von Rene Descartes (sprich: reneh dekahrt) zurückgeht, obwohl der es so nie verwendet hat. Das Kartesische Koordinatensystem ist eines der wichtigsten Hilfsmittel der Mathematik.

Wichtig für das Koordinatensystem ist die geeignete Maßeinteilung der Achsen. Die Einteilung muss nicht bei beiden Achsen gleich sein. Aber jede Achse muss eine eigene gleichmäßige Einteilung in Einheiten haben.

Bevor Punkte in das Koordinatensystem gezeichnet werden, müssen ihre Koordinaten (x - y - Wertepaar) ermittelt werden. Das geschieht durch eine Wertetabelle. Auf "Alexanders Mathematik Seite" steht eine Excel Datei zur Verfügung, wo Wertetabellen automatisch errechnet werden, wenn die richtige Formel für die Funktionsgleichung eingegeben wurde. Datei: [Wertetabelle](#)

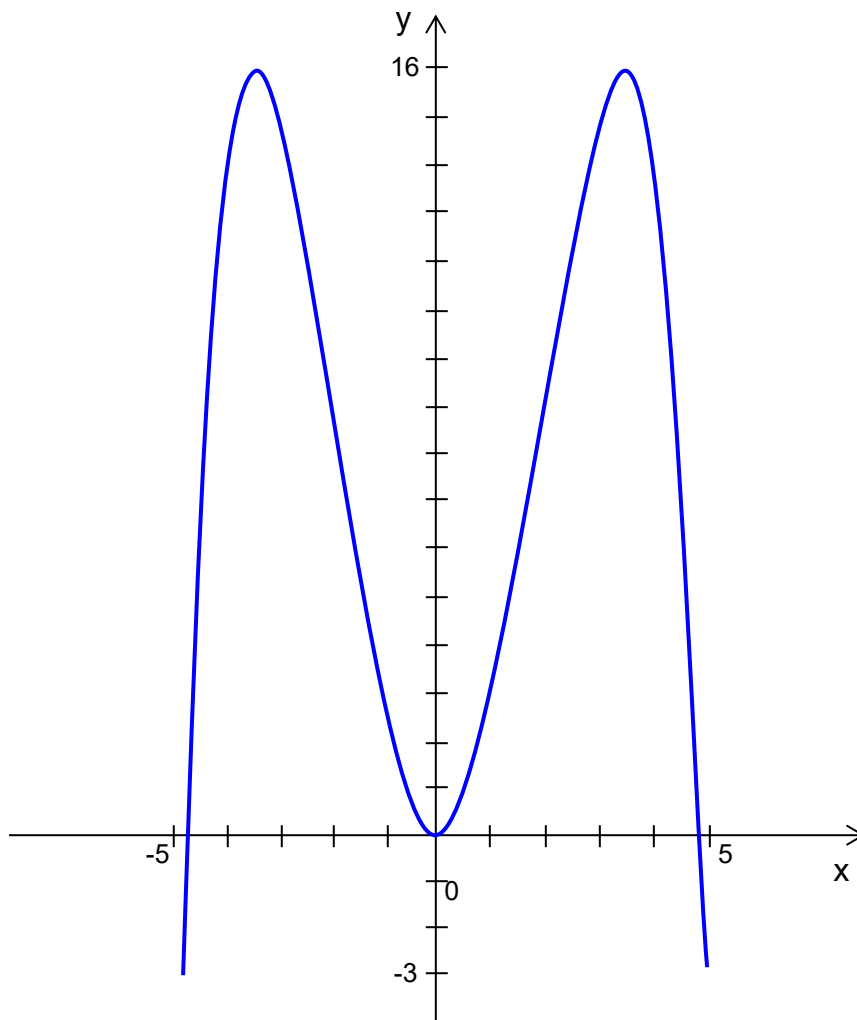
$$f_2(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2 x^2 \quad | \quad t = 2$$

Wertetabelle für die Funktion

x	y
-5,0000	-2,7778
-4,5000	8,4375
-4,0000	14,2222
-3,5000	15,9931
-3,0000	15,0000
-2,5000	12,3264
-2,0000	8,8889
-1,5000	5,4375
-1,0000	2,5556
-0,5000	0,6597
0,0000	0,0000
0,5000	0,6597
1,0000	2,5556
1,5000	5,4375
2,0000	8,8889
2,5000	12,3264
3,0000	15,0000
3,5000	15,9931
4,0000	14,2222
4,5000	8,4375
5,0000	-2,7778

Die x - Achse sollte demnach in negative und positive Richtung mindestens 5 Einheiten haben, die y - Achse in positive Richtung (nach oben) bis mindestens 16 gehen, in negative (nach unten) bis -3.

Skizze des Graphen der Funktion



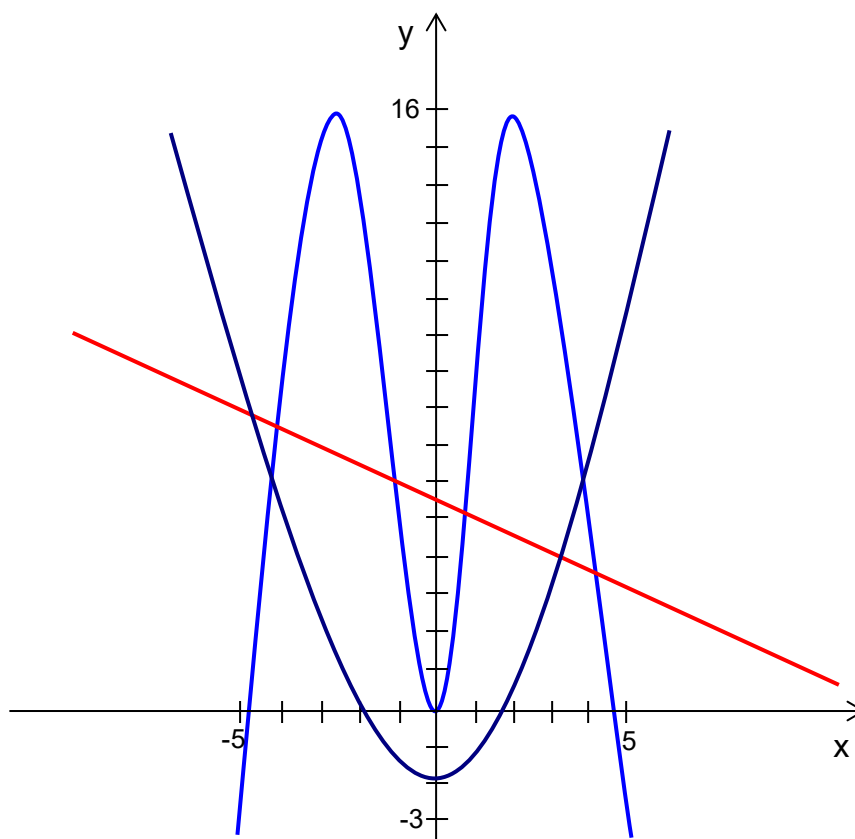
f) Die Punkte $P_1 \left(t; \frac{5}{9}t^2 \right)$, $P_2 (t\sqrt{6}; 0)$, $P_3 (-t\sqrt{6}; 0)$ liegen auf dem Graphen einer quadratischen Funktion. Ermittle eine Gleichung dieser quadratischen Funktion.

Die angegebenen Punkte sind Punkte einer anderen Funktion, die mit der Anfangsfunktion

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2$$

ebendiese Punkte gemeinsam hat. Dass zwei verschiedene Funktionen gemeinsame Punkte haben, ist nicht ungewöhnlich. Man braucht bloß durch die Funktionskurve eine Gerade zu ziehen, so dass gemeinsame **Schnittpunkte** entstehen. Jede dieser möglichen Geraden stellt eine eigene Funktion dar. Ebenso ist es (erst recht bei symmetrischen Funktionen höheren Grades) möglich, eine Parabel, also die Kurve einer quadratischen Funktion, einzuzichnen.

Skizze für Funktionen mit gemeinsamen Punkten (entspricht nicht der Lösung der Teilaufgabe)



Aus der Aufgabe geht hervor, dass es sich um eine quadratische Funktion handelt, also ist die Kurve eine Parabel. Tatsächlich erkennt man aus den Koordinaten der Punkte $P_2 (t\sqrt{6}; 0)$ und $P_3 (-t\sqrt{6}; 0)$ dass diese Parabel ebenfalls symmetrisch zur y - Achse sein muss. Allerdings handelt es sich, wie man bei der Ermittlung der Gleichung herausfindet, um eine nach unten geöffnete Parabel (negativer Anstieg).

Weil es sich um eine **quadratische Gleichung** handelt, gilt folgende Allgemeine Form (Diese Gleichung kann man wie alle hier benutzten Formeln aus einem Tafelwerk oder einer **Formelsammlung** entnehmen)

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

a und b sind Koeffizienten von x, c heißt absolutes Glied. Natürlich können sich durch entsprechende Vorzeichen auch Differenzen ergeben.

Zunächst setzt man die Koordinaten der drei gegebenen Punkte in diese allgemeine Form ein.

$$1) \quad \frac{5}{9}t^2 = at^2 + bt + c$$

$$2) \quad 0 = a \cdot 6t^2 + b \cdot \sqrt{6}t + c$$

$$3) \quad 0 = a \cdot 6t^2 - b \cdot \sqrt{6}t + c$$

Es kommt nun darauf an, **a** und **b** und **c** zu ermitteln. Schaut man sich die Gleichungen 2) und 3) an, dann erkennt man früher oder später, dass b nur = 0 sein kann, denn offenbar ist $-b = +b$ und das trifft nur auf $b = 0$ zu. Dies ist aber keine rechnerische Lösung und wird deshalb streng mathematisch nicht akzeptiert.

Die Gleichungen 1), 2), 3) stellen ein **Gleichungssystem** dar. Hier müssen also die Rechenregeln angewendet werden, die zum Lösen von Gleichungssystemen bekannt sind. Das sind im wesentlichen folgende drei Methoden

- Additionsmethode
- Gleichsetzungsmethode
- Einsetzungsmethode

Meistens werden alle drei Methoden gemischt angewendet. Der Haupttrick der Additionsmethode besteht darin, dass man eine Gleichung mit einer geeigneten Zahl multiplizieren muss und das Ergebnis (Produkt bzw. Vielfaches der Gleichung) dann zu einer anderen Gleichung addiert. Bei dieser Addition muss mindestens eine unbekannte Größe wegfallen (eliminiert werden). Wendet man diese Schritte mehrfach an, bleibt zum Schluss nur noch eine Gleichung mit einer unbekanntem Größe übrig, die sich natürlich leicht ermitteln lässt.

Man versucht also zunächst, das absolute Glied **c** zu beseitigen. Würde man die Gleichungen 1) und 2) addieren, dann erhält man $2c$. Würde man aber $+c + -c$ rechnen, dann hebt sich c auf und fällt aus der Gleichung weg. Wie bekommt man aber $-c$? Durch eine eigentlich einfache Rechnung: Man multipliziert die Gleichung 2) mit -1 . Das bedeutet praktisch, dass alle Vorzeichen der Gleichung gewechselt werden. Das ändert nichts am Ergebnis der Gleichung. Die Multiplikation mit -1 wird häufig bei solchen Gleichungssystemen angewendet und man sollte immer zuerst prüfen, ob sie sinnvoll ist. Dann kann man die Gleichungen 1) und 2) addieren. Glieder mit demselben Absolutbetrag fallen dabei weg.

$$\frac{5}{9}t^2 = at^2 + bt + c$$

$$0 = a \cdot 6t^2 + b \cdot \sqrt{6}t + c \quad | \quad \cdot (-1)$$

$$0 = -a \cdot 6t^2 - b \cdot \sqrt{6}t - c$$

$$\left(\frac{5}{9}t^2 = at^2 + bt + c \right) + \left(0 = -a \cdot 6t^2 - b \cdot \sqrt{6}t - c \right) =$$

$$\frac{5}{9}t^2 = -5at^2 + bt - bt \cdot \sqrt{6}$$

$$\frac{5}{9}t^2 = -5at^2 + bt(1 - \sqrt{6}) \quad \text{hier wurde } bt \text{ ausgeklammert}$$

Was man mit Gleichung 1) und 2) gemacht hat, kann man auch mit Gleichung 1) und 3) machen. Damit erhält man drei Gleichungen, von denen zwei bereits kein absolutes Glied c mehr haben.

$$1a) \quad \frac{5}{9}t^2 = at^2 + bt + c$$

$$2a) \quad \frac{5}{9}t^2 = -5at^2 + bt(1 - \sqrt{6})$$

$$3a) \quad \frac{5}{9}t^2 = -5at^2 + bt(1 + \sqrt{6})$$

Auch hier sieht man wieder, dass $b = 0$ sein muss, denn t ist nach Voraussetzung > 0 und die Klammerausdrücke in den Gleichungen 2) und 3) sind verschieden, die Ergebnisse auf den linken Seiten der Gleichungen sind aber gleich.

Nun multipliziert man die Gleichung 2) mit -1 und addiert sie zur Gleichung 3) hinzu.

$$\frac{5}{9}t^2 = -5at^2 + bt(1 - \sqrt{6}) \quad | \quad \cdot(-1)$$

$$-\frac{5}{9}t^2 = 5at^2 - bt(1 - \sqrt{6})$$

Zu beachten ist, dass sich im Klammerausdruck das Vorzeichen nicht ändert, weil der Klammerausdruck nur ein Teil des Summanden ist.

$$\left(\frac{5}{9}t^2 = -5at^2 + bt(1 + \sqrt{6})\right) + \left(-\frac{5}{9}t^2 = 5at^2 - bt(1 - \sqrt{6})\right) =$$

$$0 = bt(1 + \sqrt{6}) - bt(1 - \sqrt{6}) =$$

$$0 = bt + bt \cdot \sqrt{6} - bt + bt \cdot \sqrt{6} =$$

$$0 = 2bt \cdot \sqrt{6} \Rightarrow b = 0$$

Wenn nun streng mathematisch gezeigt wurde, dass $b = 0$ ist, dann ergibt sich aus Gleichung 2a)

$$\frac{5}{9}t^2 = -5at^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{9}$$

Aus Gleichung 1a) folgt

$$\frac{5}{9}t^2 = -\frac{1}{9}t^2 + c \Rightarrow c = \frac{2}{3}t^2$$

Setzt man nun a , b , c in die quadratische Gleichung ein, dann ergibt sich

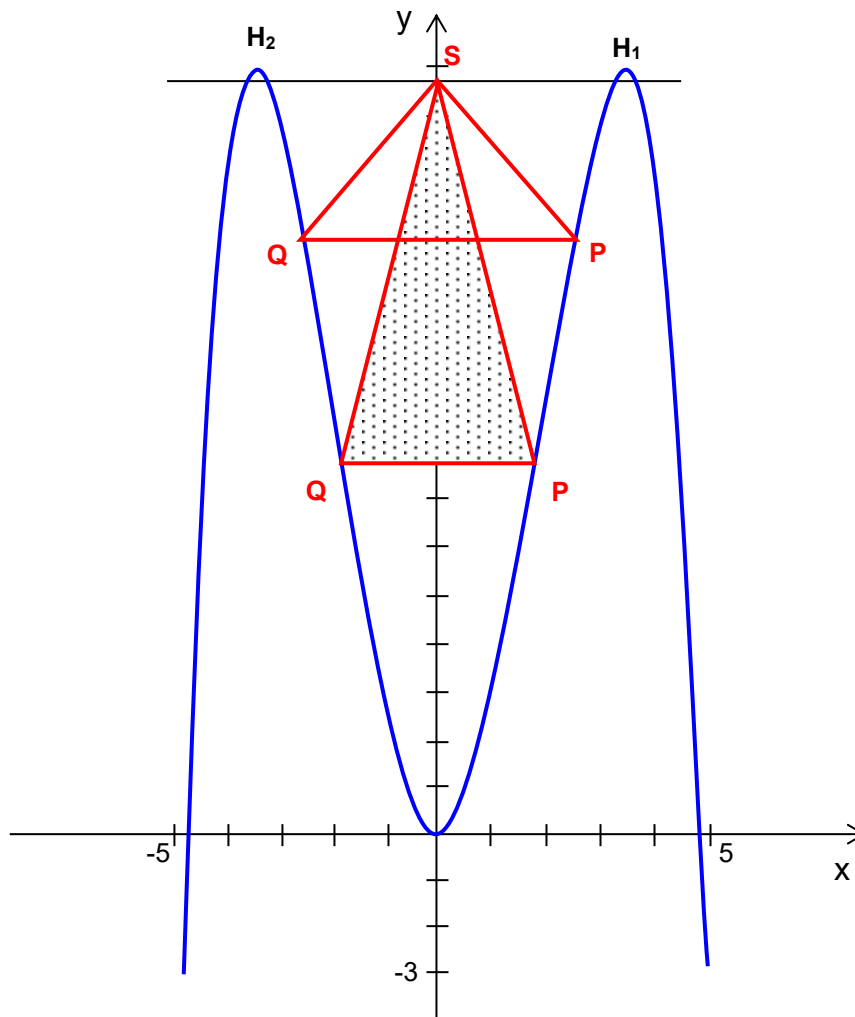
$$y = f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}t^2$$

g) Die Verbindungsgerade der beiden Maximum-Punkte des Graphen von f_2 schneidet die y -Achse im Punkt S .

Der Punkt S und die beiden Kurvenpunkte $P(x_p; f_2(x_p))$ und $Q(-x_p; f_2(-x_p))$ mit $0 < x_p < 2\sqrt{3}$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks QPS .

Für welchen Wert von x_p wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal? Gib den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks QPS an.

Diese Teilaufgabe ist eine typische [Extremwert-Aufgabe](#), die sich aus den Eigenschaften einer Funktion ergibt. In der folgenden Skizze soll veranschaulicht werden, um welches Dreieck es sich handelt.



Für das Dreieck QPS gibt es viele Möglichkeiten, im Bereich der reellen Zahlen sogar unendlich viele. Zwei mögliche Dreiecke QPS sind in der Skizze dargestellt. Nur ein einziges von allen möglichen Dreiecken QPS hat den maximalen Flächeninhalt.

Für jedes Dreieck QPS gelten folgende Bedingungen.

Die Hochpunkte H_2 und H_1 sind jeweils gleich weit von der y -Achse entfernt. Die Punkte Q und P können auf der (symmetrischen) Funktionskurve liegen und werden durch die Bedingung $0 < x_p < 2\sqrt{3}$ bestimmt.

Danach kann der x -Wert für jeden möglichen Punkt Q und P nur zwischen $x > 0$ und $x < 2\sqrt{3}$ liegen. Die untere Grenze 0 ergibt sich aus der Tatsache, dass $x > 0$ sein muss, weil sonst das Dreieck QPS keine Basisseite hätte und dann gar nicht zustande kommen würde. Die obere Grenze für x ergibt sich aus den Koordinaten $\pm t\sqrt{3}$ für die Hochpunkte. Da es sich laut Teilaufgabe um die Funktion mit $t = 2$ handelt, ergeben sich die Koordinaten für die Hochpunkte $H_2(2\sqrt{3}; 16)$ und $H_1(-2\sqrt{3}; 16)$.

Nach den Koordinaten für die Punkte $P(x_p; f_2(x_p))$ und $Q(-x_p; f_2(-x_p))$ handelt es sich in jedem Fall um ein gleichschenkliges Dreieck, für das gilt Grundseite $g = 2x_p$ (= Strecke QP) und Höhe $h_g = 16 - f_2(x_p)$.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks lässt sich berechnen mit

$$A = \frac{1}{2} g \cdot h_g$$

$$g = 2x_p$$

$$h_g = 16 - f_2(x_p)$$

$$h_g = 16 - \left(-\frac{1}{9}x_p^4 + \frac{8}{3}x_p^2\right) = 16 + \left(\frac{1}{9}x_p^4 - \frac{8}{3}x_p^2\right)$$

Den Klammerausdruck übernimmt man aus Teilaufgabe e)

$$A(x_p) = \frac{1}{2} \cdot 2x_p \cdot \left(16 + \frac{1}{9}x_p^4 - \frac{8}{3}x_p^2\right)$$

$$A(x_p) = \frac{1}{9}x_p^5 - \frac{8}{3}x_p^3 + 16x_p$$

Diese Funktion nennt man **Zielfunktion** der Extremwert-Aufgabe. Will man den maximalen Flächeninhalt berechnen, geschieht das wie die Berechnung von Extremwerten für eine Funktion. Man bildet die 1. Ableitung, setzt die 1. Ableitung = 0 und sucht nach Lösungen für diese Gleichung. Zugleich prüft man mittels der 2. Ableitung (hinreichende Bedingung), ob es sich um ein Maximum handelt.

$$A'(x_p) = \frac{5}{9}x_p^4 - 8x_p^2 + 16$$

$$A''(x_p) = \frac{20}{9}x_p^3 - 16x_p$$

$$A'(x_p) = 0 \Rightarrow \frac{5}{9}x_p^4 - 8x_p^2 + 16 = 0$$

Für diese Gleichung muss nach Lösungen gesucht werden. Es handelt sich zwar um eine Gleichung höheren Grades, für es normalerweise nur komplizierte Lösungswege gibt, doch bei näherer Betrachtung sieht man, dass in dieser Gleichung 4. Grades eine Gleichung 2. Grades (quadratische Gleichung) steckt. Deshalb benutzt man einen Rechen-trick und ersetzt die 2. Potenz durch einen Ausdruck mit 1. Potenz. Man nennt das auch **Substitution** (Ersetzung).

$$x_p^2 = z \quad \text{Danach lautet dieselbe Gleichung}$$

$$A'(x_p) = 0 \Rightarrow \frac{5}{9}z^2 - 8z + 16 = 0$$

Man sieht, dass es sich hier um die **allgemeine Form** der quadratischen Gleichung handelt. Um eine solche Gleichung zu lösen, muss allerdings das erste Glied der Gleichung ohne Koeffizient stehen (bzw. mit Koeffizient 1). Weil der Koeffizient ein Faktor ist, wird die ganze Gleichung durch den Koeffizienten dividiert. Die Ergebnis-Gleichung nennt man auch **Normalform** der quadratischen Gleichung (Die Lösungsformel und der Satz des Vieta beziehen sich bekanntlich stets auf die Normalform.)

$$\begin{aligned} \frac{5}{9}z^2 - 8z + 16 = 0 & \quad | \quad : \frac{5}{9} \\ z^2 - \frac{72}{5}z + \frac{144}{5} = 0 \end{aligned}$$

Eine solche Teilgleichung wird manchmal auch als Hilfsfunktion der Extremwertaufgabe bezeichnet. Diese quadratische Gleichung kann mittels der allgemeinen Lösungsformel gelöst werden. Die Lösungsformel bezieht sich auf die Normalform der quadratischen Gleichung

$$y = f(x) = x^2 + px + q$$

und lautet

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Nun braucht man bloß einzusetzen

$$x = z \quad p = -\frac{72}{5} \quad q = \frac{144}{5}$$

$$z_{1,2} = \frac{36}{5} \pm \sqrt{\frac{1296}{25} - \frac{144}{5}} = \frac{36}{5} \pm \sqrt{\frac{576}{25}}$$

$$z_1 = \frac{36}{5} + \frac{24}{5} = 12$$

$$z_2 = \frac{36}{5} - \frac{24}{5} = \frac{12}{5}$$

Nun gilt

$$x_p^2 = z \quad \text{Also ist}$$

$$\begin{aligned} z_1 = x_p^2 = 12 &\Rightarrow |x_p| = 2\sqrt{3} \\ x_{p1} &= 2\sqrt{3} \\ x_{p2} &= -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 = x_p^2 = \frac{12}{5} &\Rightarrow |x_p| = \frac{2}{5}\sqrt{15} \\ x_{p3} &= \frac{2}{5}\sqrt{15} \\ x_{p4} &= -\frac{2}{5}\sqrt{15} \end{aligned}$$

Nach der Bedingung ist $0 < x_p < 2\sqrt{3}$. Also kommt als Lösung nur $x_{p3} = \frac{2}{5}\sqrt{15}$ in Frage.
Die Prüfung der hinreichenden Bedingung ergibt

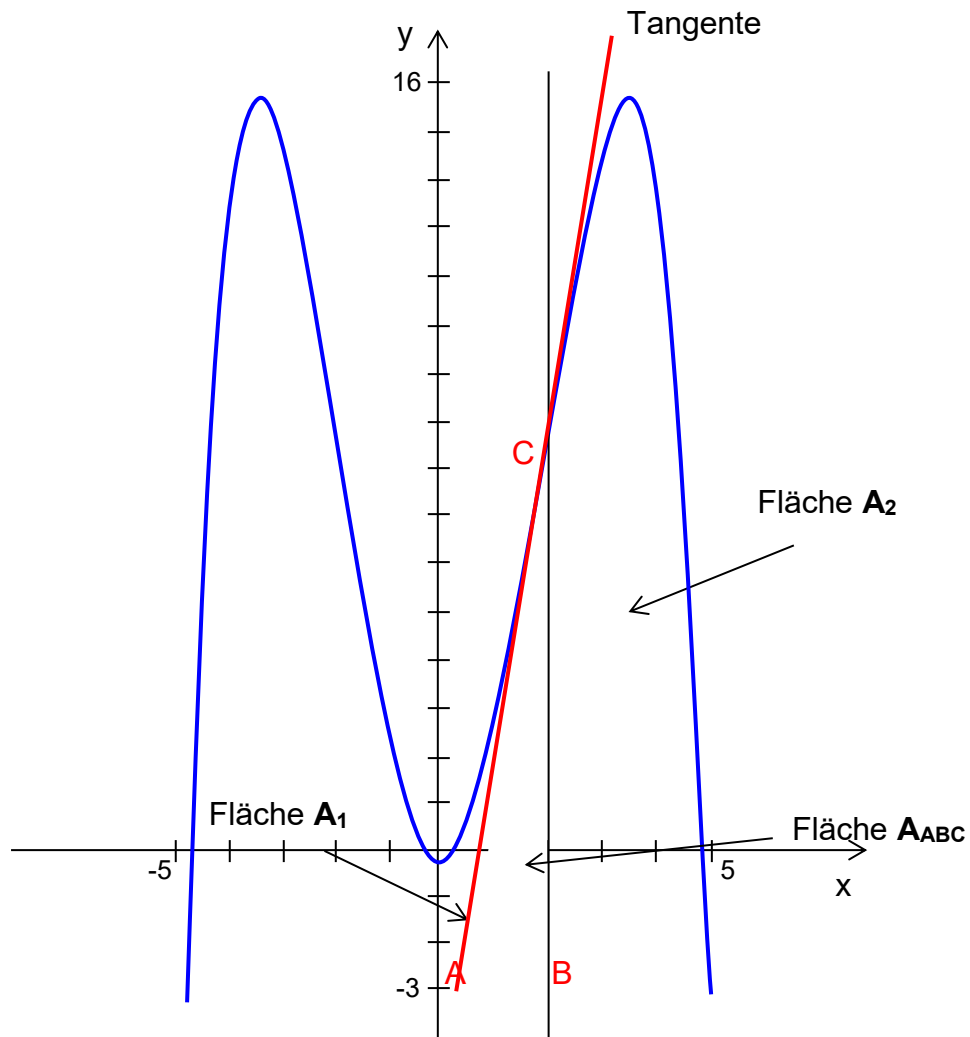
$$A''\left(\frac{2}{5}\sqrt{15}\right) = -\frac{64}{15}\sqrt{15} < 0$$

es handelt sich um ein lokales Maximum.

Der gefundene x - Wert wird nun in die Zielfunktion eingesetzt und man erhält den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks. Weil die Aufgabe keine Einheiten vorgibt, erhält der Flächeninhalt die Einheiten-Bezeichnung FE für Flächen-Einheit.

$$A\left(\frac{2}{5}\sqrt{15}\right) = \sqrt{15}\left(\frac{32}{125} - \frac{320}{125} + \frac{800}{125}\right) = \frac{512}{125}\sqrt{15} \approx 15,9 \text{ FE}$$

h) Der Graph von f_t , die Tangente an den Graphen im Wendepunkt im 1. Quadranten und die x -Achse begrenzen eine Fläche mit dem Inhalt $A(t)$. Berechne $A(t)$.



Für die Aufgabe gibt es zwei Lösungen. Sowohl Fläche A_1 als auch Fläche $A_2 + A_{ABC}$ erfüllen die genannten Bedingungen. In beiden Fällen muss auch die Fläche des eingeschlossenen Dreiecks ABC berechnet werden.

Es soll zuerst die Fläche A_1 berechnet werden. Es handelt sich um die [Berechnung eines bestimmten Integrals](#). Dafür müssen die Intervallgrenzen ermittelt werden. Bei näherer Betrachtung zeigt sich, dass man die Fläche A_1 berechnen kann, indem man die Fläche unter der Funktionskurve in den Intervallgrenzen 0 und $x(B)$ berechnet und davon die Dreiecksfläche ABC abzieht.

Zunächst sollen die Koordinaten der bekannten Punkte B und C gegeben werden, wobei C der bereits ermittelte Wendepunkt ist und B sich aus ihm ergibt, weil die Strecke BC die Seite des rechtwinkligen Dreiecks ABC ist und deshalb senkrecht auf der x - Achse steht.

$$B(t; 0)$$

$$C\left(t; \frac{5}{9}t^4\right)$$

Wie ermittelt man die Koordinaten des Punktes A? Punkt A ist offensichtlich der Punkt, wo die Tangente die x - Achse schneidet, also eine Nullstelle der Tangente. Wenn man die Gleichung für die Tangente kennt, kann man diesen Punkt einfach berechnen.

Man weiß, dass die 1. Ableitung der Anfangsfunktion = der Anstieg der Tangente ist. Also ist die 1. Ableitung für den Wendepunkt C = der Anstieg der Tangente in diesem Punkt. Damit hat man bereits den Anstieg der Tangentengleichung. Die Tangente hat - wie jede Gerade - die allgemeine Gleichung

$$y = mx + n$$

wobei m der Anstieg ist (der darüber bestimmt, ob die Gerade steigt oder fällt) und n das absolute Glied.

$$f'(t) = -\frac{4}{9}t^3 + \frac{4}{3}t^3 = \frac{8}{9}t^3 = m$$

Das absolute Glied n erhält man, wenn man die Geradengleichung in Form der sog. [Punktrichtungsgleichung der Geraden](#) schreibt, die Thema der Analytischen Geometrie ist. (Diese Gleichung kann man wie alle hier benutzten Formeln aus einem Tafelwerk oder einer Formelsammlung entnehmen)

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

In diese Gleichung werden der Anstieg m und die Koordinaten des Wendepunktes eingesetzt.

$$y - \frac{5}{9}t^4 = \frac{8}{9}t^3(x - t) = \frac{8}{9}t^3x - \frac{8}{9}t^4 \quad | \quad + \frac{5}{9}t^4$$

Daraus ergibt sich die Tangentengleichung

$$y = \frac{8}{9}t^3x - \frac{1}{3}t^4$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich für

$$0 = \frac{8}{9}t^3x - \frac{1}{3}t^4$$

$$x = \frac{3}{8}t$$

Das ist also der x - Wert für die Nullstelle der Tangente und somit $\left(\frac{3}{8}t; 0\right)$ die Koordinaten für den Punkt A. Damit sind alle drei Punkte ABC bekannt.

Fläche A_1

$$A_1 = \int_0^t f_t(x) dx - A_{ABC} \quad | \quad A_{ABC} = \frac{1}{2} g \cdot h_g \quad | \quad g = t - \frac{3}{8}t \quad | \quad h_g = f_t(t)$$

Für das bestimmte Integral benötigt man die **Stammfunktion** $f_t(x) dx$ der Anfangsfunktion. Die Integralrechnung ist die Umkehrung der Differenzialrechnung. Will man eine Stammfunktion zu einer Anfangsfunktion finden, kann man sich vorstellen, dass die Anfangsfunktion die 1. Ableitung der gesuchten Stammfunktion darstellt. Wie muss also die Stammfunktion aussehen, damit sich die Anfangsfunktion als 1. Ableitung davon ergeben würde?

Anfangsfunktion

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2$$

Man muss sozusagen die Ableitungsregel für Potenzen "rückwärts" ausführen: Den Exponenten um 1 erhöhen und dann den Koeffizienten (Beifaktor) durch den (um 1 erhöhten) Exponenten dividieren.

Beispiel: Stammfunktion für $-\frac{1}{9}x^4$

$$x^5 \Rightarrow -\frac{1}{9} : 5 = -\frac{1}{45} \Rightarrow -\frac{1}{45}x^5 \quad \text{Würde man davon die 1. Ableitung bilden, erhält man } -\frac{1}{9}x^4$$

Die Stammfunktion der Anfangsfunktion lautet demnach

$$f_t(x) dx = -\frac{x^5}{45} + \frac{2}{3}t^2x^3 \quad \text{Wie bei der Ableitung bleibt auch hier der Parameter } t \text{ unberührt.}$$

$$A_1 = \int_0^t \left(-\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2 \right) dx - A_{ABC} \quad | \quad A_{ABC} = \frac{1}{2} \left(t - \frac{3}{8}t \right) \cdot \frac{5}{9}t^4$$

$$A_1 = \left[-\frac{x^5}{45} + \frac{2}{9}t^2x^3 \right]_0^t - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{72}t^5$$

$$A_1 = \left[\left(-\frac{t^5}{45} + \frac{2}{9}t^5 \right) - (0) \right] - \frac{25}{144}t^5$$

$$A_1 = \frac{9}{45}t^5 - \frac{25}{144}t^5 = \frac{19}{720}t^5$$

Fläche $A_2 + A_{ABC}$

Die Fläche A_2 ist die Fläche unter Funktionskurve in den Intervallgrenzen t und Nullstelle $\sqrt{6}t$ plus die Fläche des Dreiecks ABC.

$$A_2 = \int_t^{\sqrt{6}t} f_t(x) dx + A_{ABC}$$

$$A_2 + A_{ABC} = \left[-\frac{x^5}{45} + \frac{2}{9}t^2x^3 \right]_t^{\sqrt{6}t} + \frac{25}{144}t^5$$

$$A_2 + A_{ABC} = \left[\left(-\frac{36\sqrt{6}}{45}t^5 + \frac{12\sqrt{6}}{9}t^5 \right) - \left(-\frac{t^5}{45} + \frac{2}{9}t^5 \right) \right] + \frac{25}{144}t^5$$

$$A_2 + A_{ABC} = \frac{384\sqrt{6} - 19}{720}t^5$$

D Abipruefung_Mathe.docx in manipulierter Version

Gymnasium

Abiturklausur Analysis

Kultusministerium
1.2.2024

Note	Erreichte Punkte (gesamt)	Prozent (%)
1+ (15)	84 - 90	93 - 100
1 (14)	79 - 83	88 - 92
1- (13)	74 - 78	82 - 87
2+ (12)	69 - 73	77 - 81
2 (11)	64 - 68	71 - 76
2- (10)	59 - 63	66 - 70
3+ (9)	54 - 58	60 - 65
3 (8)	49 - 53	55 - 59
3- (7)	44 - 48	49 - 54
4+ (6)	39 - 43	43 - 48
4 (5)	34 - 38	38 - 42
4- (4)	29 - 33	33 - 37
5+ (3)	24 - 28	27 - 32
5 (2)	19 - 23	21 - 26
5- (1)	15 - 18	16 - 20
6 (0)	0 - 14	0 - 15

Aufgabe	Punkte pro Aufgabe (max. 15)	Gesamtpunkte (max. 105)
Aufgabe a	15	15
Aufgabe b	15	30
Aufgabe c	15	45
Aufgabe d	15	60
Aufgabe e	15	75
Aufgabe f	15	90

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2 x^2$$

- a) Untersuche die Funktion f_t auf Symmetrie.
 b) Berechne die Schnittpunkte der Graphen der Funktion f_t mit der x -Achse.
 c) Untersuche den Graphen der Funktion f_t auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte.
 d) Skizziere den Graphen der Funktion f_2 im Intervall $-5 \leq x \leq 5$.

e) Die Punkte $P_1 \left(t; \frac{5}{9}t^2 \right)$, $P_2 (t\sqrt{6}; 0)$, $P_3 (-t\sqrt{6}; 0)$ liegen auf dem Graphen einer quadratischen Funktion. Ermittle eine Gleichung dieser quadratischen Funktion.

f) Die Verbindungsgerade der beiden Maximum-Punkte des Graphen von f_2 schneidet die y -Achse im Punkt S .

Der Punkt S und die beiden Kurvenpunkte $P \left(x_p; f_2(x_p) \right)$ und $Q \left(-x_p; f_2(-x_p) \right)$ mit $0 < x_p < 2\sqrt{3}$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks QPS .

Für welchen Wert von x_p wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal? Gib den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks QPS an.

a) Untersuche die Funktion f_t auf Symmetrie.

Die Symmetrie-Untersuchung prüft, ob in die Funktionskurve (Graph) eine Symmetrieachse parallel zur y - Achse eingezeichnet werden kann. Dann könnte praktisch der Kurvenverlauf links und rechts der Symmetrieachse exakt "aufeinandergelegt" werden.

Um die Symmetrie zu prüfen, werden für alle x - Werte die Vorzeichen gewechselt. Wenn dann die Funktionswerte (y - Werte) für die x - Werte sowohl mit positivem als auch negativem Vorzeichen gleich sind, ist die Funktion symmetrisch.

Bei geradem Exponenten (Potenz) von x erhält man sowohl für positive wie für negative x - Werte dasselbe (positive) Ergebnis. Das liegt daran, dass plus mal plus = plus ist und minus mal minus = plus ist. Das Quadrat eines x - Wertes hat demnach genau genommen immer zwei Lösungen.

Beispiel

$$x \cdot x = x^2 \qquad -x \cdot -x = x^2$$

Das gilt wie gesagt für jede Potenz mit geradem Exponenten. Weil eine Funktionsgleichung formal ein Polynom darstellt, kann man auch sagen, **wenn das Polynom gerade Exponenten (Potenzen) hat, dann ist die Funktion symmetrisch.**

Die Funktion

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2$$

ergibt mit gewechseltem Vorzeichen

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}(-x)^4 + \frac{2}{3}t^2(-x)^2 = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2$$

was wiederum genau $= f_t(x)$ ist. Also ist $f_t(x)$ **achsensymmetrisch zur y - Achse.**

Hinweis: Der Vorzeichenwechsel wird nur bei den **x** - Werten vorgenommen, nicht bei eventuellen anderen Variablen. In der vorliegenden Funktion gibt es eine weitere Variable **t**. Sie wird auch *Parameter* genannt ist Bestandteil des Koeffizienten (Beifaktor) für **x**.

b) Berechne die Schnittpunkte der Graphen der Funktion f_t mit der x - Achse.

Wenn die Funktionskurve (Graph) die x - Achse schneidet, dann ist der zugehörige y - Wert zwangsläufig $= 0$. Um also die Schnittpunkte mit den x - Achsen zu finden, muss man die Funktionsgleichung

$y = f_t(x) = 0$ setzen und dafür nach Lösungen (x - Werten) suchen. Man nennt die Schnittpunkte mit der x - Achse **Nullstellen der Funktion**.

$$f_t(0) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2 x^2$$

Um die Lösungen zu finden, wird die Gleichung in geeigneter Weise umgeformt, um sie für die Berechnung zu vereinfachen. Das ist nicht immer leicht und erfordert viel Übung. Am einfachsten lassen sich Gleichungen mit dem Exponenten 1 (lineare Gleichungen) und dem Exponenten 2 (quadratische Gleichungen) umformen. Dazu gehören in gewisser Weise auch die Gleichungen mit einem Exponenten, der ein Vielfaches von 2 ist, denn dann kann man **ausklammern** oder **faktorisieren**.

In der vorliegenden Gleichung ist x^2 in beiden x - Werte enthalten und kann daher als Faktor ausgeklammert werden.

$$f_t(0) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2 x^2 = x^2 \left(-\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}t^2 \right)$$

Die einfachsten Nullstellen sind die, wenn x selbst $= 0$ ist. Weil x^2 nach dem Ausklammern als Faktor steht würde die ganze Gleichung $= 0$ sein, wenn $x = 0$ ist. Denn etwas mit 0 multipliziert ergibt immer 0, egal wie groß der zweite Faktor (der Klammerausdruck) ist. Man spricht bei der Nullstelle $x = 0$ auch manchmal von **trivialer Nullstelle**, weil sie recht einfach zu finden ist.

Daher findet man als Lösung: $x = 0$. Wie bereits oben festgestellt, gibt es für ein x^2 zwei x - Lösungen, nämlich eine positive und eine negative. Auch wenn man sich schwer vorstellen kann, worin sich $+0$; -0 ; 0^2 unterscheiden, so sind die beiden Lösungen doch völlig korrekt.

$$x_{1,2} = 0$$

Man spricht hier auch von einer **Doppel-Nullstelle**.

Damit sind noch nicht alle Lösungen für $y = f_t(x) = 0$ gefunden, denn auch der Klammerausdruck stellt einen Faktor dar, der $= 0$ sein kann und dann die ganze Gleichung $= 0$ wäre. Also muss man sozusagen "Unterlösungen" finden für die Gleichung

$$\left(-\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}t^2 \right) = 0$$

Der Klammerausdruck stellt eine Summe dar. Eine Summe ergibt $= 0$, wenn die Summanden gleich groß sind, aber verschiedene Vorzeichen haben. In der vorliegenden Summe haben beide Summanden verschiedene Vorzeichen. Wenn also gilt

$$\frac{1}{9}x^2 = \frac{2}{3}t^2 \quad \text{dann wird der Klammerausdruck} = 0, \text{ denn die Summanden heben sich gegenseitig auf.}$$

Also muss man für $\frac{1}{9}x^2 = \frac{2}{3}t^2$ eine Lösung für x finden.

$$\frac{1}{9}x^2 = \frac{2}{3}t^2 \quad | \quad : \frac{1}{9}$$

$$x^2 = \frac{9}{1} \cdot \frac{2}{3}t^2 = \frac{18}{3}t^2 = 6t^2$$

$$x = \sqrt{6t^2} = \sqrt{6} \cdot t$$

Weil auch hier wieder zwei Lösungen für x möglich sind, heißen die beiden Lösungen

$$x_3 = \sqrt{6} t$$

$$x_4 = -\sqrt{6} t$$

Die Schnittpunkte mit der x - Achse haben demnach folgende Koordinaten (x;y - Paare)

$$P_1(0;0)$$

$$P_2(\sqrt{6}t;0)$$

$$P_3(-\sqrt{6}t;0)$$

Natürlich müssen die y - Werte immer = 0 sein.

c) Untersuche den Graphen der Funktion f_t auf lokale [Extrempunkte](#) und [Wendepunkte](#).

Die hauptsächlichen Rechenoperationen bei der Differenzialrechnung dienen zur Ermittlung der Koordinaten (x ; y - Werte) ganz bestimmter Punkte der Funktionskurve. Zu diesen Punkten zählen v.a. die Nullstellen, die Extrempunkte und die Wendepunkte. Diese Punkte sind deshalb so interessant, weil man sich mit ihrer Kenntnis ein Bild über den Kurvenverlauf machen kann und sich so die ganze Funktion besser vorstellen kann.

Extrempunkte einer Funktion sind solche Punkte, wo der y - Wert am größten oder am kleinsten wird. Das heißt, dort geht die Funktionskurve im Koordinatensystem am weitesten (positiv) nach oben oder am weitesten (negativ) nach unten.

Für die Berechnung der Extrempunkte bedient man sich der Rechenmittel, die Isaac Newton (sprich: eisa-ak njuten) und Gottfried Leibniz entwickelt haben und die im Grunde auf einer Ermittlung einer Funktionsgleichung für eine Tangente an die Kurve beruhen. Über diese Rechnungen sollte man sich im besonderen informieren. Hier sei nur soviel gesagt:

Um einen Extrempunkt zu berechnen, muss man die [1. Ableitung](#) der Funktion bilden. Die 1. Ableitung ist immer auch gleichbedeutend mit dem Anstieg der Tangente im Extrempunkt. Es wird also praktisch für die ursprüngliche Funktionsgleichung eine dazugehörige weitere Funktion gesucht. Um die Ableitung zu bilden, gibt es zwei hauptsächliche Verfahren. Das eine funktioniert mittels einer Grenzwert-Berechnung und kann ziemlich umfangreich sein. Das andere Verfahren ist die Anwendung von Ableitungsregeln, die in Formelsammlungen zu finden ist. Solche Ableitungsregeln kann man sich einprägen oder man kann sie bei Bedarf nachlesen.

Eine der häufigsten Ableitungen ist die von Potenzen bzw. Potenzfunktionen. Ihre allgemeine Form ist

$$f'(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

Das heißt, der Exponent wird als Faktor vor den x - Wert gesetzt und der x - Wert erhält den neuen um 1 verminderten Exponenten.

Beispiele

$$f'(x^2) = 2x$$

$$f'(2x^3) = 6x^2$$

Die 1. Ableitung wird immer mit einem hochgestellten Beistrich gekennzeichnet, jede höhere Ableitung mit entsprechenden vielen Beistrichen.

Weil man von jeder Funktion eine Ableitung bilden kann, kann man zwangsläufig auch von einer Ableitung wieder eine Ableitung bilden. Für die Differenzialrechnung spielen die ersten 3 Ableitungen einer Funktion eine Rolle.

Für diese Funktionsgleichung lauten die ersten 3 Ableitungen

$$f'(x) = -\frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}t^2x$$

$$f''(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}t^2$$

$$f'''(x) = -\frac{8}{3}x$$

Bei der 2. Ableitung ist zu beachten, dass t ein Parameter ist. Der ganze Ausdruck $\frac{4}{3}t^2$ wird deshalb wie eine konstante Zahl behandelt. Die Ableitung einer konstanten Zahl ist immer = 0. Daher fällt der ganze Ausdruck in der 3. Ableitung weg.

Mit Hilfe der Ableitungen können nun die Extrempunkte und Wendestellen ermittelt werden. Für einen lokalen Extrempunkt gilt, dass die 1. Ableitung = 0 ist. Also werden Lösungen für die Gleichung gesucht:

$$-\frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}t^2x = 0$$

Weil es für die Lösung einer kubischen Gleichung (mit Exponent 3) nur schwierige Rechenwege gibt, sollte die Gleichung vereinfacht werden. Das geschieht wieder durch Ausklammern.

$$x\left(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}t^2\right) = 0$$

Nach den Gesetzen der Multiplikation, wonach das Produkt = 0 wird, wenn mindestens ein Faktor = 0 ist, erhält man die Lösung

$$x_1 = 0$$

An dieser Stelle auf der x - Achse liegt also ein Extrempunkt der Funktion. Setzt man diesen x - Wert in die Anfangsgleichung ein, erhält man für y ebenfalls 0. Man kommt hier zu dem Ergebnis, das mit der Nullstelle der Funktion identisch ist.

Normalerweise werden zunächst alle Extrempunkte ermittelt und dann geprüft, ob es sich um lokales Maximum (höchster Punkt) oder lokales Minimum (tiefster Punkt) handelt. Die Methode für diese Prüfung soll gleich hier besprochen werden. Man braucht dafür die 2. Ableitung. Es gilt allgemein

- Wenn die 2. Ableitung für den eingesetzten x - Wert (Extremwert) größer als 0 ist, dann handelt es sich um ein Minimum (Tiefpunkt).
- Wenn die 2. Ableitung für den eingesetzten x - Wert (Extremwert) kleiner als 0 ist, dann handelt es sich um ein Maximum (Hochpunkt).

Das Prüfen der Extremwerte mittels der 2. Ableitung bezeichnet man auch als *hinreichende Bedingung*.

Setzt man die Lösung $x_1 = 0$ in die 2. Ableitung ein, erhält man

$$f''(0) = \frac{4}{3}t^2 \quad \text{und das ist immer } > \text{ (größer als) } 0, \text{ weil nach der Voraussetzung } t > 0 \text{ ist. Also handelt es sich um ein lokales Minimum } E_1(0; 0)$$

Nun sollen weitere mögliche Extrempunkte ermittelt werden. Aus der Gleichung

$$x\left(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}t^2\right) = 0$$

kann auch der Klammerausdruck = 0 sein. Dafür würde gelten

$$\frac{4}{9}x^2 = \frac{4}{3}t^2 \quad | : \frac{4}{9}$$

$$x^2 = \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3}t^2 = 3t^2$$

$$x_2 = \sqrt{3}t$$

$$x_3 = -\sqrt{3}t$$

Die beiden x - Werte für die Extrempunkte werden in die Anfangsgleichung eingesetzt.

$$f_t(\pm\sqrt{3}t) = -\frac{1}{9} \cdot 9t^4 + \frac{2}{3}t^2 \cdot 3t^2 = t^4$$

Die Extrempunkte haben demnach die Koordinaten

$$E_2 \quad (\sqrt{3}t; t^4)$$

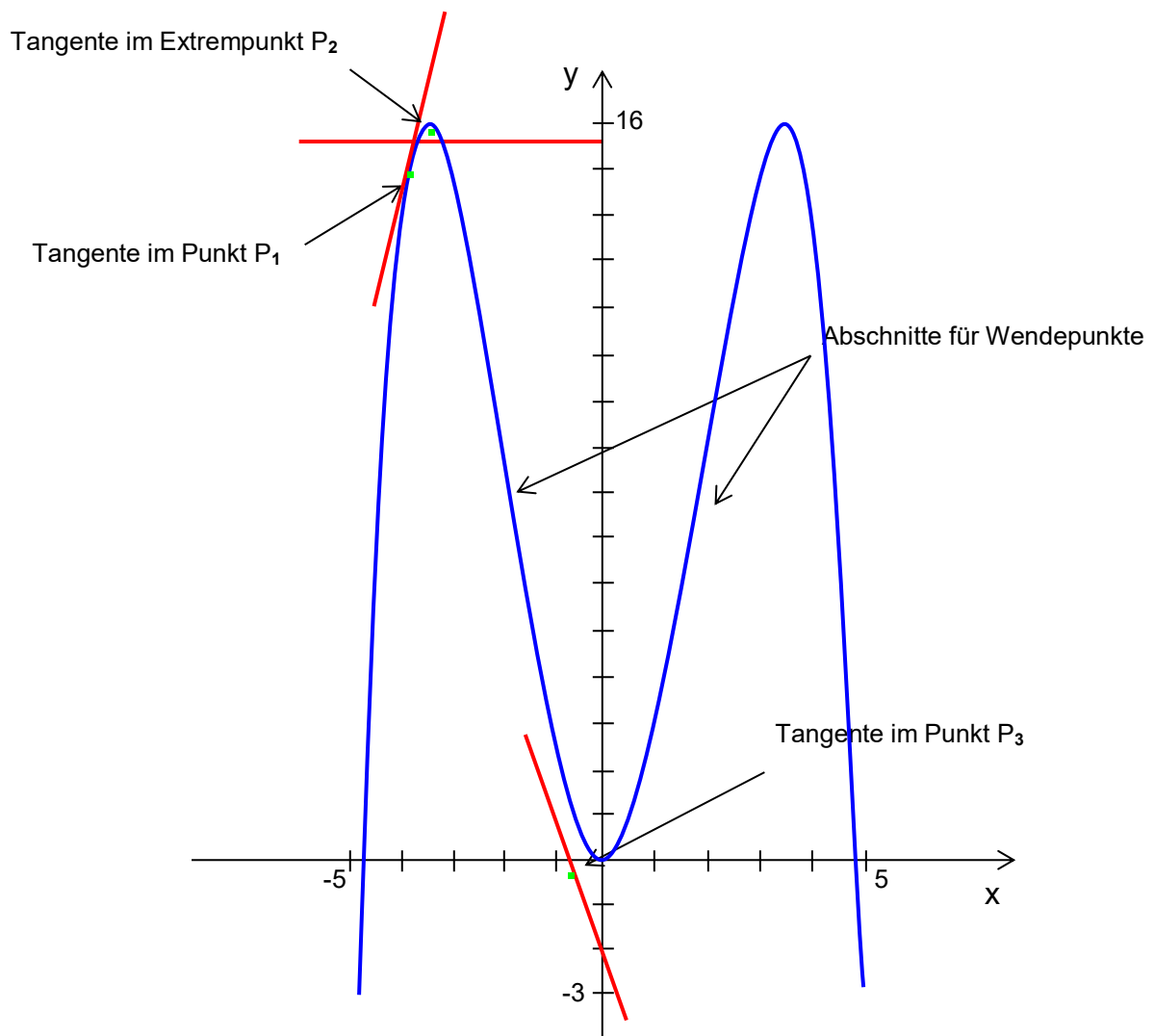
$$E_3 \quad (-\sqrt{3}t; t^4)$$

Auch für diese beiden Extrempunkte wird mittels der 2. Ableitung geprüft, ob es Hoch- oder Tiefpunkte sind.

$$f''(\pm\sqrt{3}t) = -\frac{4}{3} \cdot 3t^2 + \frac{4}{3}t^2 = \frac{8}{3}t^2 < 0$$

Es handelt sich in beiden Fällen um lokale Maxima (Hochpunkte).

Nun soll die Funktion auf Wendepunkte untersucht werden. Um zu verstehen, was ein Wendepunkt ist, kann man sich die Skizze des Funktions-Graphen ansehen, die hier schon vor der Teilaufgabe **e)** gezeigt werden soll.



Man kann sich vorstellen, dass die Tangenten von links beginnend an der Funktionskurve entlang gleiten und jede Tangente sozusagen durch genau einen Berührungspunkt mit der Kurve hindurch geht.

Wenn die Tangente z.B. vom Punkt P_1 aus an der Kurve entlang gleitet durch den Punkte P_2 bis zum Punkt P_3 , dann ändert sich dazwischen ihr Drehsinn. Während der Gleitbewegung von Punkt P_1 durch den Hochpunkt P_2 hindurch hat die Tangente einen Drehsinn in Uhrzeiger-Richtung. Das heißt, in jedem Punkt der Kurve dreht sich die Tangente ein winziges Stückchen in Uhrzeiger-Richtung. Das geht einher mit der stetigen Änderung des Anstiegs dieser Tangente.

Im Punkt P_3 dreht sich die Tangente aber offensichtlich in entgegengesetzter Uhrzeiger-Richtung. Das wird beim Durchlaufen des Tiefpunktes der Kurve besonders deutlich.

Demnach muss es zwischen P_1 und P_3 logischerweise irgendwo **einen Punkt geben, wo der Drehsinn wechselt**. Dieser Punkt ist der **Wendepunkt** der Funktion. (Der dazugehörige x - Wert auf der x - Achse heißt Wendestelle.)

Die rechnerische Ermittlung des Wendepunktes ergibt sich aus folgender Überlegung. Wie bereits festgestellt, entspricht die 1. Ableitung dem Anstieg der Tangente in einem Punkt der Funktionskurve. Diese 1. Ableitung stellt ihrerseits wiederum eine Funktion dar. Diese Funktion ist das oben beschriebene Entlanggleiten der Tangente an der Kurve. Was geschieht nun, wenn man diese Funktion (also die 1. Ableitung) wiederum als Anfangsfunktion betrachtet und davon die Ableitung bildet? Bezüglich der Ursprungsfunktion wäre das die 2. Ableitung, bezüglich der 1. Ableitung wäre das die 1. Ableitung der 1. Ableitung.

Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist, dass die 2. Ableitung der ursprünglichen Funktion = 0 ist. Demnach muss man Lösungen für folgende Gleichung finden

$$-\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}t^2 = 0$$

$$-\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}t^2 = 0 \quad | \quad +\frac{4}{3}x^2$$

$$\frac{4}{3}t^2 = \frac{4}{3}x^2 \quad \Rightarrow \quad t^2 = x^2$$

$$x_{W1} = t$$

$$x_{W2} = -t$$

Auch für Wendepunkte gibt es eine hinreichende Bedingung, die 3. Ableitung muss ungleich 0 sein.

$$f'''(x) \neq 0 \quad \text{Daraus ergibt sich}$$

$$f'''(\pm t) = \pm \frac{8}{3}t \neq 0 \quad \text{weil nach Voraussetzung } t > 0 \text{ ist.}$$

Setzt man nun die gefundenen x - Werte für die Wendepunkte in die Anfangsgleichung ein, erhält man die vollständigen Koordinaten.

$$W_1 \left(t; \frac{5}{9}t^4 \right)$$

$$W_2 \left(-t; \frac{5}{9}t^4 \right)$$

Es bestehen also folgende **Zusammenhänge**:

- Die 2. Ableitung einer Anfangsfunktion ist die 1. Ableitung der 1. Ableitung dieser Anfangsfunktion.
- Die 1. Ableitung einer Funktion entspricht dem **Anstieg der Tangente** in einem Kurvenpunkt. Wenn die Ableitung = 0 ist, dann ist der Anstieg = 0 und die Tangente liegt parallel zur x - Achse.
- Für einen **Extrempunkt** gilt, dass die 1. Ableitung = 0 sein muss.
- Für einen **Wendepunkt** gilt, dass die 2. Ableitung = 0 sein muss. Da die 2. Ableitung aber wie gesagt auch eine 1. Ableitung darstellt, muss der Wendepunkt auch eine Art Extrempunkt sein. Man sagt deshalb, dass der Wendepunkt ein relativer Extrempunkt der 1. Ableitung (als Funktion) ist. Würde man die 1. Ableitung der Anfangsfunktion als Kurve zeichnen, dann könnte man an diese Kurve auch Tangenten anlegen, wie an jede andere Funktionskurve, denn man sieht einer einzelnen Funktion nicht an, ob es eine Ableitung ist.

Diese Funktionskurve hätte genau in dem Punkt mit den Koordinaten des Wendepunktes der Anfangsfunktion einen lokalen Extrempunkt, dort wäre der Tangentenanstieg = 0.

d) Skizziere den Graphen der Funktion f_2 im Intervall $-5 \leq x \leq 5$.

Um den Graphen einer Funktion zu zeichnen, kann man ausgewählte Punkte der Funktion berechnen und im [Koordinatensystem](#) eintragen. Wenn diese Punkte verbunden werden, ergibt sich der Graph der Funktion. Er wird um so genauer, je mehr Punkte berechnet werden. Zu diesen Punkten gehören in jedem Fall die ermittelten Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte. Die Verbindung dieser Punkte gibt meistens schon eine recht gute Skizze der Funktion. Bei nicht-linearen Funktionen sollte man beachten, dass die Punkte niemals durch eine Gerade verbunden sind, sondern immer durch eine gekrümmte Linie, auch wenn die Krümmung in kleinen Kurvenabschnitten nicht mehr erkennbar ist.

Der Graph wird in ein Koordinatensystem mit x - und y - Achse eingezeichnet. Diese Achsen heißen auch Abzisse (x - Achse) und Ordinate (y - Achse). Manchmal spricht man auch von Kartesischen Koordinatensystem, weil es auf die Überlegungen von Rene Descartes (sprich: reneh dekahrt) zurückgeht, obwohl er es so nie verwendet hat. Das Kartesische Koordinatensystem ist eines der wichtigsten Hilfsmittel der Mathematik.

Wichtig für das Koordinatensystem ist die geeignete Maßeinteilung der Achsen. Die Einteilung muss nicht bei beiden Achsen gleich sein. Aber jede Achse muss eine eigene gleichmäßige Einteilung in Einheiten haben.

Bevor Punkte in das Koordinatensystem gezeichnet werden, müssen ihre Koordinaten (x - y - Wertepaar) ermittelt werden. Das geschieht durch eine Wertetabelle. Auf "Alexanders Mathematik Seite" steht eine Excel Datei zur Verfügung, wo Wertetabellen automatisch errechnet werden, wenn die richtige Formel für die Funktionsgleichung eingegeben wurde. Datei: [Wertetabelle](#)

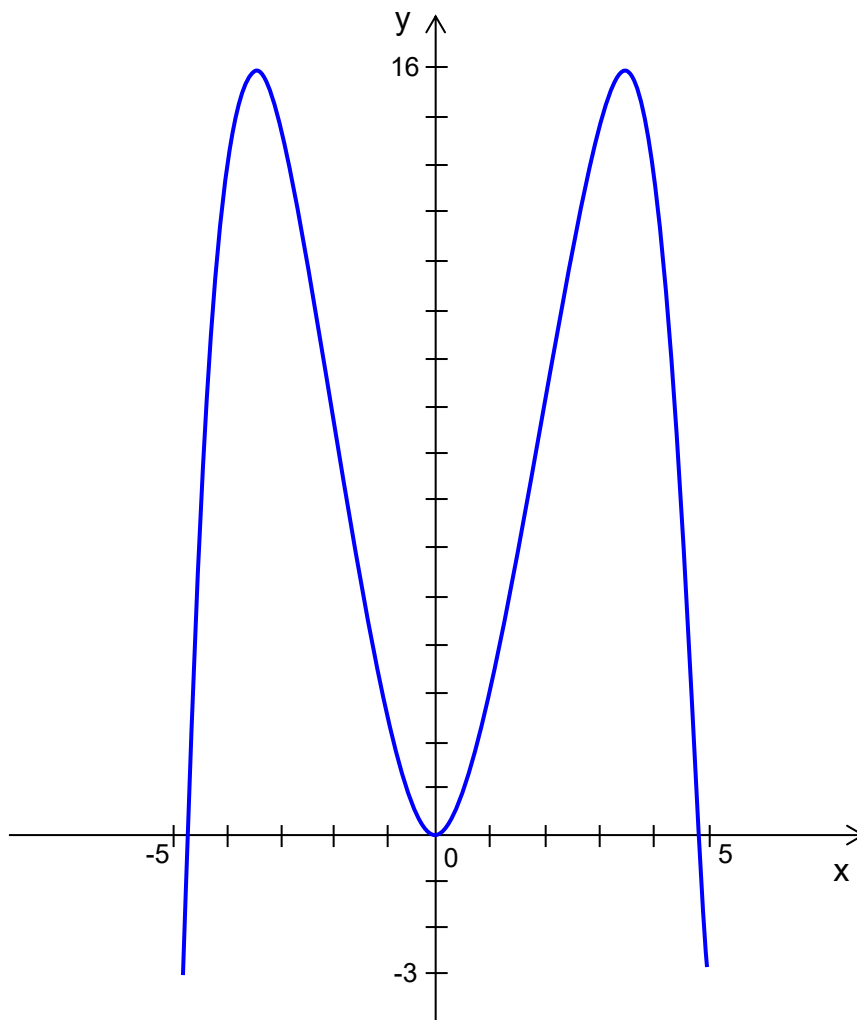
$$f_2(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2 x^2 \quad | \quad t = 2$$

Wertetabelle für die Funktion

x	y
-5,0000	-2,7778
-4,5000	8,4375
-4,0000	14,2222
-3,5000	15,9931
-3,0000	15,0000
-2,5000	12,3264
-2,0000	8,8889
-1,5000	5,4375
-1,0000	2,5556
-0,5000	0,6597
0,0000	0,0000
0,5000	0,6597
1,0000	2,5556
1,5000	5,4375
2,0000	8,8889
2,5000	12,3264
3,0000	15,0000
3,5000	15,9931
4,0000	14,2222
4,5000	8,4375
5,0000	-2,7778

Die x - Achse sollte demnach in negative und positive Richtung mindestens 5 Einheiten haben, die y - Achse in positive Richtung (nach oben) bis mindestens 16 gehen, in negative (nach unten) bis -3.

Skizze des Graphen der Funktion



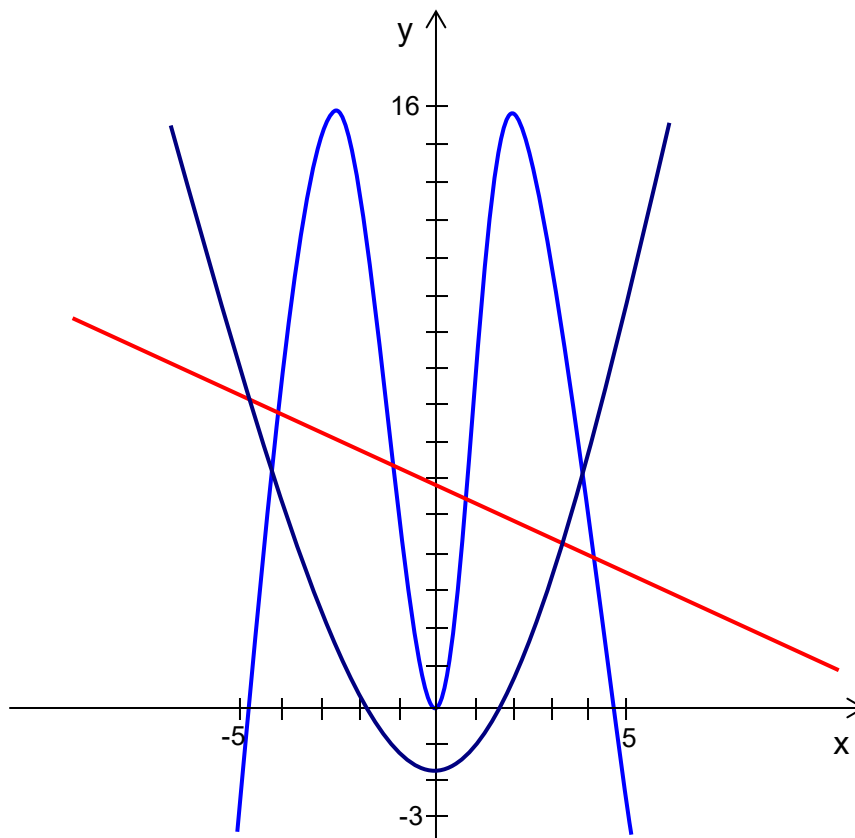
e) Die Punkte $P_1 \left(t; \frac{5}{9}t^2 \right)$, $P_2 \left(t\sqrt{6}; 0 \right)$, $P_3 \left(-t\sqrt{6}; 0 \right)$ liegen auf dem Graphen einer quadratischen Funktion. Ermittle eine Gleichung dieser quadratischen Funktion.

Die angegebenen Punkte sind Punkte einer anderen Funktion, die mit der Anfangsfunktion

$$f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2$$

ebendiese Punkte gemeinsam hat. Dass zwei verschiedene Funktionen gemeinsame Punkte haben, ist nicht ungewöhnlich. Man braucht bloß durch die Funktionskurve eine Gerade zu ziehen, so dass gemeinsame **Schnittpunkte** entstehen. Jede dieser möglichen Geraden stellt eine eigene Funktion dar. Ebenso ist es (erst recht bei symmetrischen Funktionen höheren Grades) möglich, eine Parabel, also die Kurve einer quadratischen Funktion, einzuzichnen.

Skizze für Funktionen mit gemeinsamen Punkten (entspricht nicht der Lösung der Teilaufgabe)



Aus der Aufgabe geht hervor, dass es sich um eine quadratische Funktion handelt, also ist die Kurve eine Parabel. Tatsächlich erkennt man aus den Koordinaten der Punkte $P_2 \left(t\sqrt{6}; 0 \right)$ und $P_3 \left(-t\sqrt{6}; 0 \right)$ dass diese Parabel ebenfalls symmetrisch zur y - Achse sein muss. Allerdings handelt es sich, wie man bei der Ermittlung der Gleichung herausfindet, um eine nach unten geöffnete Parabel (negativer Anstieg).

Weil es sich um eine **quadratische Gleichung** handelt, gilt folgende Allgemeine Form (Diese Gleichung kann man wie alle hier benutzten Formeln aus einem Tafelwerk oder einer **Formelsammlung** entnehmen)

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

a und b sind Koeffizienten von x, c heißt absolutes Glied. Natürlich können sich durch entsprechende Vorzeichen auch Differenzen ergeben.

Zunächst setzt man die Koordinaten der drei gegebenen Punkte in diese allgemeine Form ein.

$$1) \quad \frac{5}{9}t^2 = at^2 + bt + c$$

$$2) \quad 0 = a \cdot 6t^2 + b \cdot \sqrt{6}t + c$$

$$3) \quad 0 = a \cdot 6t^2 - b \cdot \sqrt{6}t + c$$

Es kommt nun darauf an, **a** und **b** und **c** zu ermitteln. Schaut man sich die Gleichungen 2) und 3) an, dann erkennt man früher oder später, dass b nur = 0 sein kann, denn offenbar ist $-b = +b$ und das trifft nur auf $b = 0$ zu. Dies ist aber keine rechnerische Lösung und wird deshalb streng mathematisch nicht akzeptiert.

Die Gleichungen 1), 2), 3) stellen ein **Gleichungssystem** dar. Hier müssen also die Rechenregeln angewendet werden, die zum Lösen von Gleichungssystemen bekannt sind. Das sind im wesentlichen folgende drei Methoden

- Additionsmethode
- Gleichsetzungsmethode
- Einsetzungsmethode

Meistens werden alle drei Methoden gemischt angewendet. Der Haupttrick der Additionsmethode besteht darin, dass man eine Gleichung mit einer geeigneten Zahl multiplizieren muss und das Ergebnis (Produkt bzw. Vielfaches der Gleichung) dann zu einer anderen Gleichung addiert. Bei dieser Addition muss mindestens eine unbekannte Größe wegfallen (eliminiert werden). Wendet man diese Schritte mehrfach an, bleibt zum Schluss nur noch eine Gleichung mit einer unbekanntem Größe übrig, die sich natürlich leicht ermitteln lässt.

Man versucht also zunächst, das absolute Glied **c** zu beseitigen. Würde man die Gleichungen 1) und 2) addieren, dann erhält man $2c$. Würde man aber $+c + -c$ rechnen, dann hebt sich c auf und fällt aus der Gleichung weg. Wie bekommt man aber $-c$? Durch eine eigentlich einfache Rechnung: Man multipliziert die Gleichung 2) mit -1 . Das bedeutet praktisch, dass alle Vorzeichen der Gleichung gewechselt werden. Das ändert nichts am Ergebnis der Gleichung. Die Multiplikation mit -1 wird häufig bei solchen Gleichungssystemen angewendet und man sollte immer zuerst prüfen, ob sie sinnvoll ist. Dann kann man die Gleichungen 1) und 2) addieren. Glieder mit demselben Absolutbetrag fallen dabei weg.

$$\frac{5}{9}t^2 = at^2 + bt + c$$

$$0 = a \cdot 6t^2 + b \cdot \sqrt{6}t + c \quad | \quad \cdot (-1)$$

$$0 = -a \cdot 6t^2 - b \cdot \sqrt{6}t - c$$

$$\left(\frac{5}{9}t^2 = at^2 + bt + c \right) + \left(0 = -a \cdot 6t^2 - b \cdot \sqrt{6}t - c \right) =$$

$$\frac{5}{9}t^2 = -5at^2 + bt - bt \cdot \sqrt{6}$$

$$\frac{5}{9}t^2 = -5at^2 + bt(1 - \sqrt{6}) \quad \text{hier wurde } bt \text{ ausgeklammert}$$

Was man mit Gleichung 1) und 2) gemacht hat, kann man auch mit Gleichung 1) und 3) machen. Damit erhält man drei Gleichungen, von denen zwei bereits kein absolutes Glied c mehr haben.

$$1a) \quad \frac{5}{9}t^2 = at^2 + bt + c$$

$$2a) \quad \frac{5}{9}t^2 = -5at^2 + bt(1 - \sqrt{6})$$

$$3a) \quad \frac{5}{9}t^2 = -5at^2 + bt(1 + \sqrt{6})$$

Auch hier sieht man wieder, dass $b = 0$ sein muss, denn t ist nach Voraussetzung > 0 und die Klammerausdrücke in den Gleichungen 2) und 3) sind verschieden, die Ergebnisse auf den linken Seiten der Gleichungen sind aber gleich.

Nun multipliziert man die Gleichung 2) mit -1 und addiert sie zur Gleichung 3) hinzu.

$$\frac{5}{9}t^2 = -5at^2 + bt(1 - \sqrt{6}) \quad | \quad \cdot(-1)$$

$$-\frac{5}{9}t^2 = 5at^2 - bt(1 - \sqrt{6})$$

Zu beachten ist, dass sich im Klammerausdruck das Vorzeichen nicht ändert, weil der Klammerausdruck nur ein Teil des Summanden ist.

$$\left(\frac{5}{9}t^2 = -5at^2 + bt(1 + \sqrt{6})\right) + \left(-\frac{5}{9}t^2 = 5at^2 - bt(1 - \sqrt{6})\right) =$$

$$0 = bt(1 + \sqrt{6}) - bt(1 - \sqrt{6}) =$$

$$0 = bt + bt \cdot \sqrt{6} - bt + bt \cdot \sqrt{6} =$$

$$0 = 2bt \cdot \sqrt{6} \Rightarrow b = 0$$

Wenn nun streng mathematisch gezeigt wurde, dass $b = 0$ ist, dann ergibt sich aus Gleichung 2a)

$$\frac{5}{9}t^2 = -5at^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{9}$$

Aus Gleichung 1a) folgt

$$\frac{5}{9}t^2 = -\frac{1}{9}t^2 + c \Rightarrow c = \frac{2}{3}t^2$$

Setzt man nun a , b , c in die quadratische Gleichung ein, dann ergibt sich

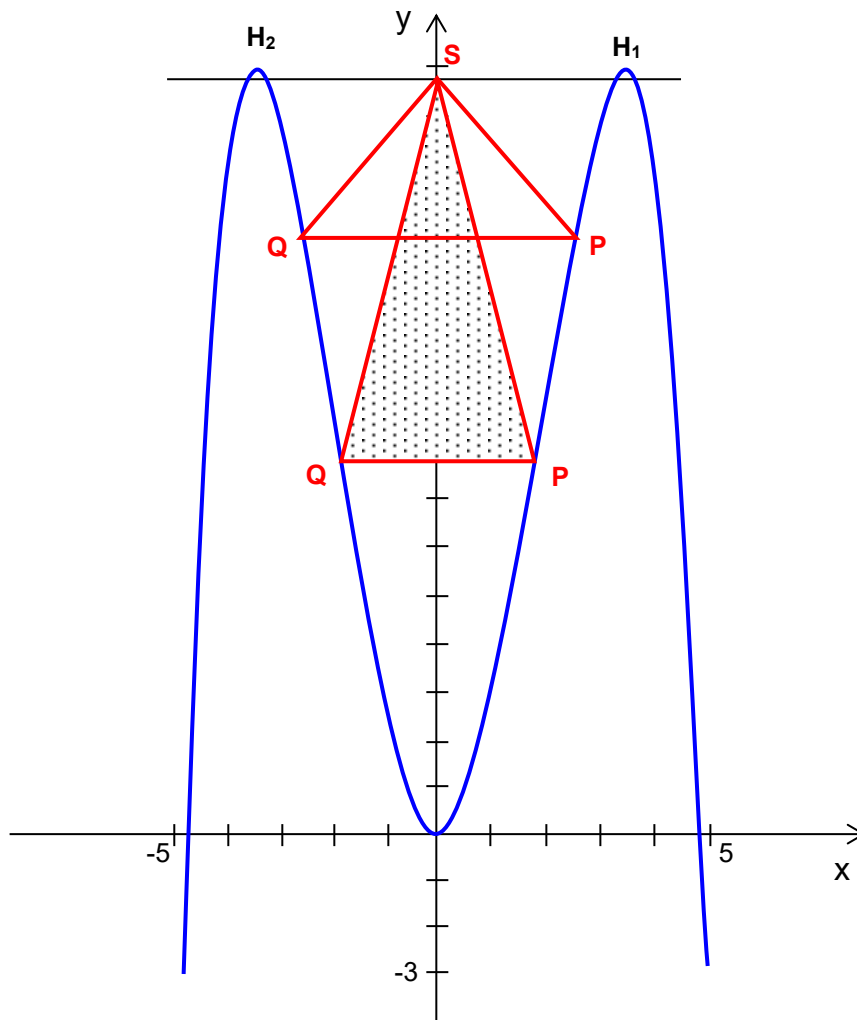
$$y = f(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}t^2$$

f) Die Verbindungsgerade der beiden Maximum-Punkte des Graphen von f_2 schneidet die y - Achse im Punkt S .

Der Punkt S und die beiden Kurvenpunkte $P(x_p; f_2(x_p))$ und $Q(-x_p; f_2(-x_p))$ mit $0 < x_p < 2\sqrt{3}$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks QPS .

Für welchen Wert von x_p wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal? Gib den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks QPS an.

Diese Teilaufgabe ist eine typische [Extremwert-Aufgabe](#), die sich aus den Eigenschaften einer Funktion ergibt. In der folgenden Skizze soll veranschaulicht werden, um welches Dreieck es sich handelt.



Für das Dreieck QPS gibt es viele Möglichkeiten, im Bereich der reellen Zahlen sogar unendlich viele. Zwei mögliche Dreiecke QPS sind in der Skizze dargestellt. Nur ein einziges von allen möglichen Dreiecken QPS hat den maximalen Flächeninhalt.

Für jedes Dreieck QPS gelten folgende Bedingungen.

Die Hochpunkte H_2 und H_1 sind jeweils gleich weit von der y -Achse entfernt. Die Punkte Q und P können auf der (symmetrischen) Funktionskurve liegen und werden durch die Bedingung $0 < x_p < 2\sqrt{3}$ bestimmt.

Danach kann der x -Wert für jeden möglichen Punkt Q und P nur zwischen $x > 0$ und $x < 2\sqrt{3}$ liegen. Die untere Grenze 0 ergibt sich aus der Tatsache, dass $x > 0$ sein muss, weil sonst das Dreieck QPS keine Basisseite hätte und dann gar nicht zustande kommen würde. Die obere Grenze für x ergibt sich aus den Koordinaten $\pm t\sqrt{3}$ für die Hochpunkte. Da es sich laut Teilaufgabe um die Funktion mit $t = 2$ handelt, ergeben sich die Koordinaten für die Hochpunkte $H_2(2\sqrt{3}; 16)$ und $H_1(-2\sqrt{3}; 16)$.

Nach den Koordinaten für die Punkte $P(x_p; f_2(x_p))$ und $Q(-x_p; f_2(-x_p))$ handelt es sich in jedem Fall um ein gleichschenkliges Dreieck, für das gilt Grundseite $g = 2x_p$ (= Strecke QP) und Höhe $h_g = 16 - f_2(x_p)$.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks lässt sich berechnen mit

$$A = \frac{1}{2} g \cdot h_g$$

$$g = 2x_p$$

$$h_g = 16 - f_2(x_p)$$

$$h_g = 16 - \left(-\frac{1}{9}x_p^4 + \frac{8}{3}x_p^2\right) = 16 + \left(\frac{1}{9}x_p^4 - \frac{8}{3}x_p^2\right)$$

Den Klammerausdruck übernimmt man aus Teilaufgabe e)

$$A(x_p) = \frac{1}{2} \cdot 2x_p \cdot \left(16 + \frac{1}{9}x_p^4 - \frac{8}{3}x_p^2\right)$$

$$A(x_p) = \frac{1}{9}x_p^5 - \frac{8}{3}x_p^3 + 16x_p$$

Diese Funktion nennt man **Zielfunktion** der Extremwert-Aufgabe. Will man den maximalen Flächeninhalt berechnen, geschieht das wie die Berechnung von Extremwerten für eine Funktion. Man bildet die 1. Ableitung, setzt die 1. Ableitung = 0 und sucht nach Lösungen für diese Gleichung. Zugleich prüft man mittels der 2. Ableitung (hinreichende Bedingung), ob es sich um ein Maximum handelt.

$$A'(x_p) = \frac{5}{9}x_p^4 - 8x_p^2 + 16$$

$$A''(x_p) = \frac{20}{9}x_p^3 - 16x_p$$

$$A'(x_p) = 0 \Rightarrow \frac{5}{9}x_p^4 - 8x_p^2 + 16 = 0$$

Für diese Gleichung muss nach Lösungen gesucht werden. Es handelt sich zwar um eine Gleichung höheren Grades, für es normalerweise nur komplizierte Lösungswege gibt, doch bei näherer Betrachtung sieht man, dass in dieser Gleichung 4. Grades eine Gleichung 2. Grades (quadratische Gleichung) steckt. Deshalb benutzt man einen Rechenrick und ersetzt die 2. Potenz durch einen Ausdruck mit 1. Potenz. Man nennt das auch **Substitution** (Ersetzung).

$$x_p^2 = z \quad \text{Danach lautet dieselbe Gleichung}$$

$$A'(x_p) = 0 \Rightarrow \frac{5}{9}z^2 - 8z + 16 = 0$$

Man sieht, dass es sich hier um die **allgemeine Form** der quadratischen Gleichung handelt. Um eine solche Gleichung zu lösen, muss allerdings das erste Glied der Gleichung ohne Koeffizient stehen (bzw. mit Koeffizient 1). Weil der Koeffizient ein Faktor ist, wird die ganze Gleichung durch den Koeffizienten dividiert. Die Ergebnisgleichung nennt man auch **Normalform** der quadratischen Gleichung (Die Lösungsformel und der Satz des Vieta beziehen sich bekanntlich stets auf die Normalform.)

$$\begin{aligned} \frac{5}{9}z^2 - 8z + 16 = 0 & \quad | \quad : \frac{5}{9} \\ z^2 - \frac{72}{5}z + \frac{144}{5} = 0 \end{aligned}$$

Eine solche Teilgleichung wird manchmal auch als Hilfsfunktion der Extremwertaufgabe bezeichnet. Diese quadratische Gleichung kann mittels der allgemeinen Lösungsformel gelöst werden. Die Lösungsformel bezieht sich auf die Normalform der quadratischen Gleichung

$$y = f(x) = x^2 + px + q$$

und lautet

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Nun braucht man bloß einzusetzen

$$x = z \quad p = -\frac{72}{5} \quad q = \frac{144}{5}$$

$$z_{1,2} = \frac{36}{5} \pm \sqrt{\frac{1296}{25} - \frac{144}{5}} = \frac{36}{5} \pm \sqrt{\frac{576}{25}}$$

$$z_1 = \frac{36}{5} + \frac{24}{5} = 12$$

$$z_2 = \frac{36}{5} - \frac{24}{5} = \frac{12}{5}$$

Nun gilt

$$x_p^2 = z \quad \text{Also ist}$$

$$\begin{aligned} z_1 = x_p^2 = 12 &\Rightarrow |x_p| = 2\sqrt{3} \\ x_{p1} &= 2\sqrt{3} \\ x_{p2} &= -2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 = x_p^2 = \frac{12}{5} &\Rightarrow |x_p| = \frac{2}{5}\sqrt{15} \\ x_{p3} &= \frac{2}{5}\sqrt{15} \\ x_{p4} &= -\frac{2}{5}\sqrt{15} \end{aligned}$$

Nach der Bedingung ist $0 < x_p < 2\sqrt{3}$. Also kommt als Lösung nur $x_{p3} = \frac{2}{5}\sqrt{15}$ in Frage.
Die Prüfung der hinreichenden Bedingung ergibt

$$A''\left(\frac{2}{5}\sqrt{15}\right) = -\frac{64}{15}\sqrt{15} < 0$$

es handelt sich um ein lokales Maximum.

Der gefundene x - Wert wird nun in die Zielfunktion eingesetzt und man erhält den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks. Weil die Aufgabe keine Einheiten vorgibt, erhält der Flächeninhalt die Einheiten-Bezeichnung FE für Flächen-Einheit.

$$A\left(\frac{2}{5}\sqrt{15}\right) = \sqrt{15}\left(\frac{32}{125} - \frac{320}{125} + \frac{800}{125}\right) = \frac{512}{125}\sqrt{15} \approx 15,9 \text{ FE}$$
